Algorithmische Eigenschaften von Branching-Time Logiken

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Philosophie
an der
Philosophischen Fakultät
der
Technischen Universität Dresden

vorgelegt von

Dipl.-Math. Sebastian Bauer
geb. am 26.09.1972 in Karl-Marx-Stadt

Betreuer:

Prof. Dr. phil. habil. Heinrich Wansing, TU-Dresden

Gutachter:

1. Prof. Dr. phil. habil. Heinrich Wansing, TU-Dresden
2. Prof. Dr. rer. nat. habil. Frank Wolter, University of Liverpool
3. Prof. Dr. rer. nat. habil. Marcus Kracht, University of California

Inhaltsübersicht

1 Einleitung

Erststufige Erweiterungen nichtlinearer Zeitlogiken sind in Folge ihrer mathematischen Komplexität einer systematischen Analyse relativ schwer zugänglich und bisher entsprechend wenig betrachtet worden. In den vergangenen Jahren wurden jedoch Methoden entwickelt, mit deren Hilfe quantifizierte lineare Zeitlogiken hinsichtlich ihrer Axiomatisierbarkeit bzw. Entscheidbarkeit erfolgreich untersucht werden konnten. Es liegt demzufolge nahe, die dort entwickelten Techniken auch auf nichtlineare Zeitlogiken anzuwenden.

Die vorliegende Arbeit versteht sich als Fortführung der mit [31] und [3] begonnenen Analyse algorithmischer Eigenschaften von Branching-Time Logiken. Der Leser soll mit dem hier Gezeigten, sowie den aufgeführten Ergebnissen anderer Autoren, einen Überblick über den aktuellen Stand der Forschung, sowie Ansätze für zukünftige Arbeiten auf dem Gebiet nichtlinearer Temporallogiken erhalten.

Temporallogik. In den letzten Jahrzehnten sind temporale Logiken von Philosophen wie *Prior* und *Kamp* [42, 33, 40] entwickelt worden, die in zahlreichen Gebieten, so etwa innerhalb der modernen Informatik durch Arbeiten von *Pnueli* und anderen [41], Verbreitung fanden. Zeitlogik ist inzwischen ein weites und intensiv beforschtes Gebiet, das in seinem ganzen Umfang hier nicht beschrieben werden kann (der interessierte Leser sei beispielsweise auf [19] verwiesen).

Die einfachste Form der zeitlichen Beschreibung von Prozessen oder Veränderungen eines Systems geht von einer linearen Zeitskale aus. Schaut man von einem gegebenen Zeitpunkt aus in die Zukunft, dann gibt es nur *eine* festgelegte Entwicklung in der Zeit. Diese Art der temporalen Beschreibung eignet sich besonders zur Modellierung deterministischer Vorgänge.

Einige Philosophen hingegen glauben, daß zukünftige Ereignisse lediglich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit eintreten können — ausschließlich die Vergangenheit steht als unabänderlich gegeben fest. Temporallogiker beschreiben diese Ungewißheit zukünftigen Geschehens, indem sie Zeitverläufe oder Geschichten *verzweigen* lassen; das heißt, die Vergangenheit jedes Zeitpunktes ist fixiert, in der Zukunft aber kann es verschiedene unvergleichbare Zeitpunkte geben.

Ausgehend von diesen modellhaften Vorstellungen, suchen Philosophen seit längerem nach formalen (axiomatischen) Beschreibungen einer nichtdeterministischen Welt (siehe etwa [9, 54, 55]). Etwa zeitgleich traten diese Logiken auch in das Blickfeld der Informatik. Für Implementationen die „intelligente" Agenten einsetzen, erschienen Branching-Time Logiken als die geeignetsten Formalismen, um die Unvorhersagbarkeit bestimmter Prozesse zu beschreiben.

Am Anfang der Entwicklung einer Logik steht die Frage nach deren Ausdrucksstärke, nach den Möglichkeiten also, die zu beschreibenden Strukturen durch diese Logik sprachlich zu erfassen. Dabei zeigt sich, daß ein Zuwachs an sprachlichen Mitteln zumeist mit dem Verlust „guter" Eigenschaften einer Logik wie deren Axiomatisierbarkeit oder Entscheidbarkeit einhergeht. So zum Beispiel beim Übergang von einem aussagenlogischen Formalismus zu dessen erststufiger Erweiterung. Man sucht deshalb auf dem Wege syntaktischer

Einschränkungen *Fragmente* dieser Logiken, die hinreichend ausdrucksstark sind, die gewünschten Phänomene zu beschreiben, aber trotzdem die erforderlichen algorithmischen Eigenschaften besitzen. Ein Beispiel dafür ist die Untersuchung sogenannter *monodischer* Fragmente erststufiger Temporallogiken.

Propositionale Temporallogik. In dieser Arbeit betrachten wir Formalismen, die in zwei Klassen unterteilt werden können: Solche, die rein propositionaler Natur sind und solche, denen die Prädikatenlogik erster Stufe zugrunde liegt.

Die Untersuchung aussagenlogischer Temporallogiken reicht bis in die frühen 1970-iger Jahre zurück. In *linearen* Strukturen lassen sich die beiden klassischen Operatoren $\Box$ und $\Diamond$ der Modallogik als „Immer in der Zukunft“ bzw. „Irgend wann in der Zukunft“ interpretieren. So ist zum Beispiel die Logik über den natürlichen Zahlen, versehen mit der üblichen $<$-Relation, in dieser Sprache axiomatisierbar (siehe [48] und [23] für dieses und weitere Resultate). Es lassen sich aber weitere und ausdrucksstärkere Operatoren hinzunehmen, etwa „Im nächsten Moment“ $\bigcirc$ oder „Until“ U (siehe weiter unten). Die sich aus dieser Spracherweiterung ergebende Logik über $(\mathbb{N}, <)$ ist beispielsweise PSPACE-vollständig [49, 50] oder [19]. Letztere Eigenschaft einer Logik gibt Auskunft über deren *Komplexität* und damit gleichzeitig über die Möglichkeit ein entsprechendes Entscheidungsverfahren für diese Logik effektiv umsetzen zu können.

Betrachtet man jedoch ausschließlich lineare Strukturen, dann ist die Beschreibung einer nicht-deterministischen Welt kaum mehr möglich. Ein realistischeres Abbild der meisten zu formalisierenden nicht-deterministischen Prozesse, ergibt sich mit Hilfe baumartiger, das heißt, sich verzweigender Strukturen. Logiken, die Strukturen dieser Art beschreiben, werden in naheliegender Weise *Branching-Time Logiken* genannt. Ein in diesem Zusammenhang sehr einflußreicher Formalismus ist CTL^* (*Computation Tree Logic*), der in den 1980-iger Jahren von Emerson und Halpern entwickelt wurde [16]. Die Attraktivität von CTL^* beruht nicht zuletzt auf deren Entscheidbarkeit in doppelt exponentieller Zeit [17] sowie der Existenz einer endlichen Axiomatisierung [47]. Mittlerweile ist CTL^* eine sehr populäre Logik, die zum Beispiel zur Programmspezifikation und -verifikation eingesetzt wird. CTL^* steht in engem Zusammenhang mit Branching-Time Logiken, die in der Philosophie betrachtet werden. Allerdings gibt es Unterschiede: CTL^* benutzt die Temporaloperatoren „Im nächsten Moment“ und „Until“, im Gegensatz zu dem in der Philosophie gebräuchlicheren Operator „In der Zukunft“ (dieser kann jedoch in CTL^* ohne Probleme ausgedrückt werden). Spätere Erweiterungen von CTL^* verfügen zusätzlich über Operatoren die in die Vergangenheit weisen [47].

Eine weitere, historisch gesehen frühere Version von CTL^* ist CTL [12]. Vereinfacht gesagt enthält CTL nur diejenigen Formeln aus CTL^*, deren Wahrheitswert aufgrund ihrer syntaktischen Beschaffenheit generell unabhängig von den jeweiligen Zweigen (Branches) in den zugrunde liegenden Modellen ist. CTL ist axiomatisierbar (eine Tatsache, die wir in dieser Arbeit ausnutzen werden) und EXPTIME-vollständig [15].

Quantifizierte Temporallogik. Der Schritt von klassischer Aussagenlogik zu erststufiger Logik bedeutet einen erheblichen Zugewinn an Ausdrucksstärke. Innerhalb der philosophischen Logik bildet die Prädikatenlogik häufig den Ausgangspunkt weiterfürender Untersuchungen. Mit Hilfe der Prädikatenlogik lassen sich unmittelbar Konzepte innerhalb der künstlichen Intelligenz, etwa für Datenbanken, ausdrücken. Programmiersprachen wie *Prolog* machen von ihr Gebrauch, und nicht zuletzt kann die gesammte Mathematik über die Mengenlehre prädikatenlogisch formalisiert werden.

Die Prädikatenlogik ist bekanntermaßen unentscheidbar. Jedoch gewinnen entscheidbare erststufige Fragmente, wie etwa das Guarded Fragment, in den letzten Jahren zunehmend an Bedeutung. Durch den Übergang von propositionalen zu erstufigen Formalismen gewinnt man sehr viele ausdrucksstarke Sprachen, die weitreichende Anwendungen erlauben. Das gilt insbesondere für quantifizierte Temporallogiken, die mittlerweile für viele Anwendungen, wie etwa bei der Entwicklung temporaler Datenbanken [11] oder bei Spezifikations- und Verifikationsaufgaben [36], als die natürlichste Wahl erscheinen.

Die Untersuchung erststufiger Erweiterungen temporaler Logiken wurde durch frühe negative Resultate verzögert (beginnend mit unpublizierten Arbeiten von Lemmon und Scott in den 1960-iger Jahren, in denen gezeigt wurde, daß sogar sehr schwache Fragmente dieser Logiken hochgradig unentscheidbar sind — insbesondere über linearer Zeit). So ist selbst das monadische Zweivariablenfragment der erststufigen Temporallogik über den natürlichen Zahlen nicht mehr rekursiv aufzählbar [19, 29].

Bemerkenswerter Weise existieren, trotz der erwähnten negativen Ergebnisse, ausdrucksstarke Fragmente dieser Logiken, die noch entscheidbar sind. Die sogenannten *monodischen* Fragmente erststufiger Temporallogiken [29] sind ein bedeutsames Beispiel dafür. Eine Formel der quantifizierten Temporallogik heißt *monodisch*, wenn jede ihrer Teilformeln, die mit einem Temporaloperator beginnt, höchstens eine freie Variable enthält. Auf der einen Seite liefert quantifizierte Temporallogik zu jedem Zeitpunkt die volle Stärke der Prädikatenlogik, auf der anderen Seite stellt das monodische Fragment alle Mittel der Temporallogik bereit, die Entwicklung *eines* Objektes in der Zeit zu verfolgen.

Durch weitere Einschränkung auf eines der üblichen entscheidbaren Fragmente der Prädikatenlogik (Guarded Fragment, monadisches Fragment, Zweivariablenfragment), gelangt man schließlich zu Fragmenten der quantifizierten Temporallogik, die über eine große Klasse linearer Zeitverläufe, wie die der natürlichen Zahlen, der rationalen Zahlen, aller linearen Zeitverläufe, der endlichen linearen Zeitverläufe und nicht zuletzt der reellen Zahlen (mit endlichen Individuenbereichen), entscheidbar sind [29]. Darüber hinaus ist sowohl das monodisch monadische Fragment als auch das monodische Zweivariablenfragment quantifizierter Temporallogik über der natürlichen Zahlen EXPSPACE-vollständig [20].

Auf diesem Wege erhält man entscheidbare Logiken, die mit Hilfe geeigneter Einbettungen dazu genutzt werden können, Entscheidbarkeitsaussagen für weitere temporale Formalismen, wie epistemische Temporallogiken [18], Raum–Zeit Logiken [53] und temporale Beschreibungslogiken [20], zu erhalten (vergleiche dazu Abschnitt 6 dieser Arbeit). Darüber hinaus finden die genannten Ergebnisse mehr und mehr Eingang in philosophische Arbeiten, etwa zur modalen Handlungstheorie [4]. Beispielhaft sei hier auf Anwendungen innerhalb der *Seeing-to-it-that Theorie*, kurz Stit Theorie, verwiesen [32].

Neben den Untersuchungen zur Entscheidbarkeit einer Logik, wird sowohl in der philosophischen Praxis als auch in der Informatik häufig nach einer vollständigen Axiomatisierung, also einem genau diese Logik erfassenden syntaktischen Apparat, gesucht. Wie erwähnt, ist noch nicht einmal das monadische Zweivariablenfragment der erststufigen Temporallogik über den natürlichen Zahlen rekursiv aufzählbar. Folglich ist diese Logik nicht axiomatisierbar. Im Gegensatz dazu motivieren die genannten positiven Entscheidbarkeitsaussagen zu diversen nichttrivialen Fragmenten quantifizierter Temporallogiken, die Suche nach vollständigen Axiomatisierungen. Ein Beispiel für diese Entwicklung ist der Nachweis der rekursiven Aufzählbarkeit des monodischen Fragments der erststufigen Temporallogik über den natürlichen Zahlen [52].

Es ergibt sich aus den bisherigen Betrachtungen unmittelbar die Frage, ob nicht auch ähnlich positive Resultate bezüglich monodischer Fragmente *nichtlinearer* Zeitlogiken zu erreichen sind.

Branching-Time Logiken – State of the art. Mit [31] begann die systematische Untersuchung quantifizierter Branching-Time Logiken und wurden in [3] fortgesetzt. In [31] wurde gezeigt, daß sogar das Einsvariablenfragment von QCTL^*, also das Einsvariablenfragment der erststufigen Erweiterung von CTL^*, unentscheidbar ist. Da dieses Fragment trivialer Weise monodisch ist, lag es auf der Hand, zu den bisherigen syntaktischen Einschränkungen (Monodizität, entscheidbare Fragmente der Prädikatenlogik) noch weitere hinzuzuziehen, um schließlich doch noch zu entscheidbaren Fragmenten quantifizierten CTL^* zu gelangen. Eine solche zusätzliche Einschränkung wurde in der selben Arbeit vorgeschlagen — namentlich durch Einschränkung der Anwendung erststufiger Quantoren auf sogenannte *State Formeln*, das heißt, auf branchunabhängige Formeln. Auf diese Weise lassen sich in der Tat entscheidbare Fragmente quantifizierten CTL^* definieren [31].

Es existieren jedoch Anwendungen, in denen nicht nur über State Formeln quantifiziert wird (Abschnitt 5.3 bringt ein einfaches Beispiel). In [3] findet sich daher eine weitere Form der Einschränkung, die auf so genannte *schwach monodische* Fragmente führt. In einer schwach monodische Formel in QCTL^* werden alle temporalen Operatoren, ausgenommen $\mathsf{Next\text{-}Time}$, ausschließlich auf Sätze angewandt. Die Entscheidbarkeit der in [3] eingeführten Fragmente ergibt sich in Folge der dort gezeigten Entscheidbarkeit von CTL^* in so genannter *nichtlokaler* Semantik: Üblicherweise hängt der Wahrheitswert atomarer Aussagen nicht von dem jeweiligen Branch ab, bezüglich dessen die Wahrheitswerte komlexer Aussagen bestimmt werden. Nichtlokale Semantiken unterscheiden an dieser Stelle jedoch nicht mehr zwischen atomaren oder zusammengesetzten Aussagen; der Wahrheitswert einer Aussagenvariable ist hier explizit branchabhängig (siehe die Diskussion in Abschnitt 4).

Die vorliegende Arbeit. Nach einer allgemeinen Einführung in die Begriffswelt dieser Arbeit (Abschnitt 2), beginnen wir unsere Untersuchungen zu den algorithmischen Eigenschaften von Branching-Time Logiken mit der Axiomatisierung des monodischen Fragments von QCTL (Abschnitt 3). Zu Beginn werden wir in 3.1 zeigen, daß noch nicht einmal das monadische Zweivariablenfragment von QCTL rekursiv aufzählbar ist. Daran anschließend weisen wir die Vollständigkeit des in Abschnitt 3.2 vorgeschlagenen Axiomensystems nach. Die Resultate der Abschnitte 2 und 3 gehen auf den Autor dieser Arbeit zurück.

Der gesamte Abschnitt 4 geht der Frage nach, ob die Aussagenlogik CTL^* in nichtlokaler Semantik entscheidbar ist. Der Inhalt dieses Abschnitts ist der Gemeinschaftsarbeit [3] des Autors mit I. Hodkinson, F. Wolter und M. Zakharyaschev, entnommen. Abschnitt 5 wendet sich schließlich wieder den erststufigen Formalismen zu. Es wird gezeigt, wie sich mit Hilfe der bis dahin entwickelten Methoden Entscheidbarkeitsaussagen bezüglich monodischer Fragmente temporaler Logiken gewinnen lassen. Unterabschnitt 5.1 untersucht die Entscheidbarkeit monodischer Fragmente von QCTL und 5.3 die Entscheidbarkeit (schwach) monodischer Fragmente von QPCTL^* (das P steht für die Anwesenheit vergangenheitsbezogender Operatoren). Die Ergebnisse in 5.1 entstammen der Arbeit des Autors, die des Abschnitts 5.3 [3]. In 5.2 wird der Einfluß den Spracherweiterungen (Konstanten, Gleichheit und Funktionensymbole) auf das algorithmische Verhalten der von uns betrachteten Logiken haben, behandelt. Der genannte Abschnitt orientiert sich dabei an den entsprechenden Ausführungen in [52].

Im letzten Teil dieser Arbeit, wenden wir uns der praktischen Anwendbarkeit der geschilderten Resultate zu. Wie in [51] und [53] bezüglich linearer Zeitlogik geschehen, soll hier am Beispiel der *temporalen Beschreibungslogik* TALC (in Abschnitt 6.1) und am Beispiel der *Raum-Zeit Logik* $t\mathcal{BRCC}$-8 (in Abschnitt 6.2) gezeigt werden, wie sich mit Hilfe der Entscheidbarkeitsaussagen der vorangegangenen Abschnitte, entscheidbare Formalismen zur Wissensrepräsentation bzw. -verarbeitung geeignet definieren lassen.

2 Branching-Time Logik

Wird die Sprache der klassischen Aussagenlogik um die Temporaloperatoren U (Until) und $\bigcirc$ (Im nächsten Moment) sowie den Pfadquantor E (Es gibt eine Geschichte) ergänzt, so kann die entsprechend erweiterte Sprache in verzweigten temporalen Strukturen, sogenannten Bäumen, interpretiert werden. Auf diese Weise gelangt man zu propositionalen Zeitlogiken wie CTL und CTL^* [16, 35]. Werden den Knoten (Zeitpunkte) eines Baumes nicht einfach nur aussagenlogische Modelle sondern erststufige Strukturen zugeordnet, dann lassen sich nach Hinzunahme der Ausdrucksmittel der Prädikatenlogik die jeweiligen erststufigen Erweiterungen QCTL bzw. QCTL^* dieser Logiken definieren.

2.1 Bäume

Ein *Baum* $\mathcal{T}$ ist eine Struktur der Form $(T, <)$, wobei T eine nicht-leere Menge (von Zeitpunkten) und $<$ eine strikte partielle Ordnung über T (der Nachfolgerrelation von $\mathcal{T}$) ist, so daß gilt:

- $\mathcal{T}$ besitzt eine *Wurzel*, das heißt ein kleinstes Element bezüglich $<$ und
- für jedes $w \in T$ ist die Menge $\{v \in T \mid v < w\}$ der Vorgänger von w in $\mathcal{T}$ linear geordnet durch $<$.

Maximal durch $<$ linear geordnete Teilmengen von T heißen *Branches* in $\mathcal{T}$. Sie repräsentieren Geschichtsverläufe. Es gibt Fälle, in denen jedoch nicht alle möglichen dieser Verläufe als zulässig gelten, so daß bisweilen auch nur gewisse Mengen $\mathcal{B}$ von Branches, sogenannte *Bündel* in $\mathcal{T}$ betrachtet werden, die dann als die einzig zulässigen gelten. Ein Tripel der Form $(T, <, \mathcal{B})$ heißt *allgemeiner Baum*.

Gegeben ein Zeitpunkt $w \in T$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{B}(w)$ die Menge aller Branches β in $\mathcal{B}$, so daß $w \in \beta$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß $\bigcup \mathcal{B} = T$.

Ein allgemeiner Baum $(T, <, \mathcal{B})$ heißt *ungebündelt*, wenn $\beta \in \mathcal{B}$ für jeden Branch β in $(T, <)$. In diesem Fall werden wir nicht zwischen ungebündelten allgemeinen Bäumen und ihren unterliegenden Bäumen $(T, <)$ unterscheiden.

Generell gehen wir von einer unendlich in die Zukunft hinein ausgedehnten Zeit aus. Das heißt, mögliche *Zeitverläufe* werden durch (allgemeine) *ω-Bäume* repräsentiert, das sind Bäume, in denen jeder Branch ordnungsisomorph zu den natürlichen Zahlen ist. Wir werden es aber auch mit endlichen Bäumen zu tun haben. Wir sagen, daß $\mathcal{T}$ abzählbar ist, wenn T abzählbar ist.

2.2 Sprache

Der klassische Teil der Sprache umfaßt die folgenden Zeichen:

- *Prädikatensymbole* $P_0, P_1, \ldots$, mit jeweils einer festen Stelligkeit,
- eine abzählbare Menge *var* von *Individuenvariablen* $x_0, x_1, \ldots$,

– die *Boolschen* Operatoren $\wedge$, $\neg$, $\perp$ und

– der *Existenzquantor* $\exists x$ für beliebige Variablen $x \in var$.

Zusätzlich definieren wir den temporalen Teil der Sprache wie folgt:

– die *Zeitoperatoren* U, S und $\bigcirc$ (Until, Since und Next) sowie

– die *Pfadquantoren* E und A.

Wie üblich stehe $\forall x$ abkürzend für $\neg\exists x\neg$, wobei $x \in var$ beliebig. Andere Standardabkürzungen, die wir benutzen werden, sind: $\Diamond\varphi = \top\mathsf{U}\varphi$ (Einmal in der Zukunft), $\Box\varphi = \neg\Diamond\neg\varphi$ (Immer in der Zukunft). Wir werden den Next-Time Operator $\bigcirc$ je nach Bedarf und Zweckmäßigkeit entweder als primitiven Operator oder aber als Abkürzung für Ausdrücke der Gestalt $\bigcirc\varphi = \perp\mathsf{U}\varphi$ verwenden. Die in die Vergangenheit weisenden Entsprechungen zu den obigen Operatoren werden ganz analog mit Hilfe von S definiert. Zur besseren Unterscheidbarkeit werden die Vergangenheitsoperatoren mit einem P indiziert: $\Diamond_P$, $\Box_P$, $\bigcirc_P$. Um das Verständnis der nachfolgenden Kapitel nicht unnötig zu erschweren, verzichten wir zunächst auf die Einführung von *Konstanten*. Darüber hinaus werden die *Gleichheit* sowie *Funktionssymbole* in Kapitel 5.2.1 und 5.2.2 gesondert betrachtet.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}_{\mathsf{QL}}$ die Menge der prädikatenlogischen Formeln, das heißt derjenigen Formeln, die sich aus dem klassischen Teil des oben genannten Alphabets entsprechend den üblichen Regeln bilden lassen. Da sich 0-stellige Prädikatensymbole als Aussagenvariablen interpretieren lassen — wir werden von dieser Praxis Gebrauch machen — besteht die Sprache $\mathcal{L}_{\mathsf{L}}$ der klassischen Aussagenlogik L gerade aus denjenigen $\mathcal{L}_{\mathsf{QL}}$-Formeln, die keine Quantoren, sowie höchstens nur 0-stellige Prädikate enthalten.

Im weiteren unterscheiden wir Sprachen, entsprechend den zugehörigen Semantiken, mit bzw. ohne Stern *. Der Stern soll andeuten, daß es sich hier um eine Sprache handelt, in der Ausdrücke gebildet werden, deren Wahrheitswert explizit branchabhängig ist. Weiterhin stehe das P im Index, wie bei den temporalen Operatoren, für die Möglichkeit, in den betreffenden Sprachen Sätze bilden zu können, die auf die Vergangenheit Bezug nehmen.

Die Menge $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}^*}$ ist die kleinste Erweiterung von $\mathcal{L}_{\mathsf{QL}}$ die abgeschlossen ist bezüglich der vier folgenden Operationen: Sind ψ, ψ_1 und ψ_2 beliebige $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}^*}$-Formeln, dann sind auch $\mathsf{E}\psi$, $\mathsf{A}\psi$, $\bigcirc\psi$ sowie $\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ und $\psi_1\mathsf{S}\psi_2$ in $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}^*}$. Eine $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}^*}$-Formel φ ist eine $\mathcal{L}_{\mathsf{PCTL}^*}$-Formel genau dann, wenn φ lediglich Aussagenvariablen und keine Quantoren enthält. $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}^*}$ ist die umfassendste von uns betrachtete Sprache.

Eine *State Formel* in $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}^*}$ ist entweder eine rein prädikatenlogische Formel oder hat die Gestalt $\mathsf{E}\bigcirc\psi$, $\mathsf{A}\bigcirc\psi$, $\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ oder $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ (entsprechend für S), wobei ψ, ψ_1 und ψ_2 beliebige State Formeln sind. Das heißt, jedem temporalen Operator wird ein Pfadquantor vorangestellt. Es enthalte dann $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}}$ genau die State Formeln aus $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}^*}$.

Die entsprechenden Sprachfragmente von $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}^*}$ ohne Vergangenheitsoperatoren ergeben sich aus $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}^*}$ durch Wegnahme aller Formeln in denen ein S vorkommt. Die zugehörigen Sprachen werden entsprechend mit $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}^*}$, $\mathcal{L}_{\mathsf{CTL}^*}$ bzw. mit $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$ bezeichnet.

Im weiteren soll nicht zwischen einer endlichen Menge Γ von Formeln und der Konjunktion $\bigwedge \Gamma$ aller in ihr enthaltenen Formeln unterschieden werden.

2.3 Modelle

Wir geben hier eine völlig allgemeine Definition eines QPCTL^*-Modells; wirklich interessieren werden wir uns dann lediglich für bestimmte „Teilaspekte“ dieser Strukturen, wie den rein propositionalen nichtlokalen oder den erststufigen lokalen Fall.

Ein *nichtlokales* QPCTL^*-*Modell* ist ein Tripel der Form $\mathcal{M} = (\mathcal{T}, D, \cdot)$. Dabei ist $\mathcal{T}$ ein ω-Baum der Form $(T, <)$, D eine nichtleere Menge, der *Domain* von $\mathcal{M}$, und $\cdot$ eine Funktion, die jedem Zeitpunkt $w \in T$ und jedem $\beta \in \mathcal{B}(w)$ eine klassische $\mathcal{L}_{\mathsf{QL}}$-Struktur

$$\mathcal{M}_{\beta,w} = (D, P_0^{\beta,w}, P_1^{\beta,w}, \ldots),$$

dem *State* von $\mathcal{M}$ in β und w, zuordnet. Dabei ist $P_i^{\beta,w}$ für jedes i ein Prädikat über D mit derselben Stelligkeit wie P_i (für Aussagenvariablen p_i ist das Prädikat $p_i^{\beta,w}$ einfach eine der beiden Konstanten $\top$ für „Wahr“ oder $\bot$ für „Falsch“). Eine Struktur der Form $\mathcal{M} = (\mathcal{T}, D, \cdot)$ heißt nichtlokales $b\mathsf{QCTL}$-Modell oder nichtlokales *allgemeines* Modell, wenn der unterliegende ω-Baum $\mathcal{T}$ ein allgemeiner Baum ist (das b steht für *bundled*). Ein QPCTL^*-*Modell* ist ein nichtlokales QCTL^*-Modell, so daß

$$\mathcal{M}_{\beta,w} = \mathcal{M}_{\beta',w},$$

für jedes $w \in T$ und alle $\beta, \beta' \in \mathcal{B}(w)$. In diesem Fall spricht man von der *lokalen*, im Gegensatz zu der zuvor definierten *nichtlokalen* Form der Semantik.

Eine *Belegung* in $\mathcal{M}$ ist eine Funktion $\mathfrak{f}$ von *var* in D. Für ein Modell $\mathcal{M}$, einen Zeitpunkt $w \in T$ und einen Branch $\beta \in \mathcal{B}(w)$ definieren wir die Relation $\mathcal{M}, \beta, w \models^{\mathfrak{f}} \varphi$ für beliebige $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}^*}$-Formeln φ (zu lesen als: „die $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}^*}$-Formel φ gilt im Zeitpunkt w bezüglich β, unter der Belegung $\mathfrak{f}$, im Modell $\mathcal{M}$“) rekursiv wie folgt; zunächst die Standardbedingungen:

- $\mathcal{M}, \beta, w \models^{\mathfrak{f}} P_i(x_1, \ldots, x_k) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}_{w,\beta}, \mathfrak{f} \models P_i^{w,\beta}(x_1, \ldots, x_k)$,
- $\mathcal{M}, \beta, w \models^{\mathfrak{f}} \psi_1 \wedge \psi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}, \beta, w \models^{\mathfrak{f}} \psi_1$ und $\mathcal{M}, \beta, w \models^{\mathfrak{f}} \psi_2$,
- $\mathcal{M}, \beta, w \models^{\mathfrak{f}} \neg\psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}, \beta, w \not\models^{\mathfrak{f}} \psi$,
- $\mathcal{M}, \beta, w \models^{\mathfrak{f}} \exists x\psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}, \beta, w \models^{\mathfrak{f}'} \psi$, für eine Belegung $\mathfrak{f}'$ in $\mathcal{M}$ die sich höchstens in x von $\mathfrak{f}$ unterscheidet.

Die temporalen Operatoren:

- $\mathcal{M}, \beta, w \models^{\mathfrak{f}} \bigcirc\psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}, \beta, v \models^{\mathfrak{f}} \psi$, für den direkten Nachfolger v von w in β,
- $\mathcal{M}, \beta, w \models^{\mathfrak{f}} \mathsf{E}\psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}, \beta', w \models^{\mathfrak{f}} \psi$, für ein $\beta' \in \mathcal{B}(w)$,

– $\mathcal{M}, \beta, w \models^{\mathfrak{f}} \mathsf{A}\psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}, \beta', w \models^{\mathfrak{f}} \psi$, für alle $\beta' \in \mathcal{B}(w)$,

– $\mathcal{M}, \beta, w \models^{\mathfrak{f}} \psi_1 \mathsf{U} \psi_2 \quad \Leftrightarrow$ es existiert ein $v \geq w$ in β, so daß $\mathcal{M}, \beta, v \models^{\mathfrak{f}} \psi_2$ und $\mathcal{M}, \beta, u \models^{\mathfrak{f}} \psi_1$, falls $w \leq u < v$,

– $\mathcal{M}, \beta, w \models^{\mathfrak{f}} \psi_1 \mathsf{S} \psi_2 \quad \Leftrightarrow$ es existiert ein $v \leq w$, so daß $\mathcal{M}, \beta, v \models^{\mathfrak{f}} \psi_2$ und $\mathcal{M}, \beta, u \models^{\mathfrak{f}} \psi_1$, falls $v < u \leq w$.

Wir sagen, daß eine $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}^*}$-Formel φ (allgemein) *erfüllbar* ist, wenn es ein (allgemeines) Modell $\mathcal{M}$ und eine Belegung $\mathfrak{f}$ in $\mathcal{M}$ gibt, so daß $\mathcal{M}, \beta, w \models^{\mathfrak{f}} \varphi$ für einen Zeitpunkt w in T und einen Branch $\beta \in \mathcal{B}(w)$. Weiterhin sagen wir, daß φ (allgemein) *gültig* ist, wenn $\neg\varphi$ nicht (allgemein) erfüllbar ist.

Bemerkung 1. Sei $\mathcal{M} = (\mathcal{T}, D, \cdot)$ ein lokales Modell. Für jede State Formel φ, alle Belegungen $\mathfrak{f}$ in $\mathcal{M}$, jedes $w \in T$ sowie alle $\beta, \beta' \in \mathcal{B}(w)$ gilt:

$$\mathcal{M}, \beta, w \models^{\mathfrak{f}} \varphi \quad \text{gdw} \quad \mathcal{M}, \beta', w \models^{\mathfrak{f}} \varphi.$$

Das heißt, in lokalen Modellen ist der Wahrheitswert einer $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}}$-Formel unabhängig von dem jeweils zugrunde gelegten Branch. Daher können wir das β in $\mathcal{M}, \beta, w \models^{\mathfrak{f}} \varphi$ unterdrücken und schlicht $\mathcal{M}, w \models^{\mathfrak{f}} \varphi$ schreiben.

Die folgende Definition führt diejenen Logiken ein, die uns nachfolgend beschäftigen werden (beachte noch einmal, daß $\mathcal{L}_{\mathsf{CTL}^*} \subset \mathcal{L}_{\mathsf{PCTL}^*} \subset \mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}^*}$ und $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}} \subset \mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}^*}$):

Definition 2 (CTL^*, PCTL^*, QCTL). Die Menge aller (allgemein) gültigen $\mathcal{L}_{\mathsf{CTL}^*}$, $\mathcal{L}_{\mathsf{PCTL}^*}$ und $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$-Formeln wird mit CTL^* ($b\mathsf{CTL}^*$), PCTL^* ($b\mathsf{PCTL}^*$) bzw. QCTL ($b\mathsf{QCTL}$) bezeichnet.

Diskussion

Wie in der Einleitung beschrieben, arbeiten wir hier einerseits mit der nichtlokalen Form der Semantik von CTL^* — die Wahrheitswerte atomarer Aussagen können von dem jeweiligen Branch β der Bewertung abhängen — und andererseits mit der lokalen Semantik von QCTL.

Wir übernehmen hier die in den Informatik häufig verwandte *reflexive* Form der Semantik von Until und Since. Die in der Philosophie üblichere irreflexive Variante, die beispielsweise $\psi_1 \mathsf{U} \psi_2$ als zu $\bigcirc(\psi_1 \mathsf{U} \psi_2)$ äquivalent bezüglich der obigen Semantik setzt, wird uns erst weiter unten im Zusammenhang mit unseren Untersuchungen zu CTL^* und PCTL^* beschäftigen. In nichtlokaler Semantik kann das Erfüllbarkeitsproblem mit reflexiven Operatoren in polynomialer Zeit, auf das Erfüllbarkeitsproblem mit irreflexiven Operatoren (unter Benutzung zusätzlicher Aussagenvariablen, die Subformeln benennen) reduziert werden.

Es gibt Alternativen zu unserer Definition der Bewertung von Formeln in Paaren der Gestalt (β, w). Einige Philosophen [9, 55] bewerten Branching-Time Formeln ausschließlich bezüglich Branches in $\mathcal{T}$. Das sind in diesem Fall nichtleere linear geordnete Teilmengen

$\beta \subseteq T$, die nicht notwendig maximal, jedoch nach oben abgeschlossen sind (aus $y > x \in \beta$ folgt $y \in \beta$), und die ein $<$-minimales Element besitzen (das ist in ω-Bäumen automatisch der Fall). Dieser Ansatz ist leicht als zu dem obigen äquivalent zu erkennen — siehe zum Beispiel [55, S. 5]. Im Zusammenhang mit bestimmten Anwendungen sind gebündelte Semantiken häufig dort von großem Interesse, wo das Bündel die „fairen" oder „legalen" Verläufe der Ereignisse repräsentieren soll. Das Erfüllbarkeitsproblem in allgemeinen, also gebündelten Modellen, läßt sich auf das in ungebündelten Modellen reduzieren, wie weiter unten als Variante des Beweises von Lemma 61 gezeigt werden soll.

Offensichtlich impliziert Erfüllbarkeit stets allgemeine Erfüllbarkeit (die Menge aller Branches kann stets zu einem Bündel zusammengefaßt werden). Wie das folgende Beispiel jedoch zeigt, ist die umgekehrte Richtung im allgemeinen falsch. Die $\mathcal{L}_{\mathsf{CTL}^*}$-Formel

$$p \wedge \mathsf{A}\Box(p \rightarrow \mathsf{E}\bigcirc p) \wedge \neg\mathsf{E}\Box p$$

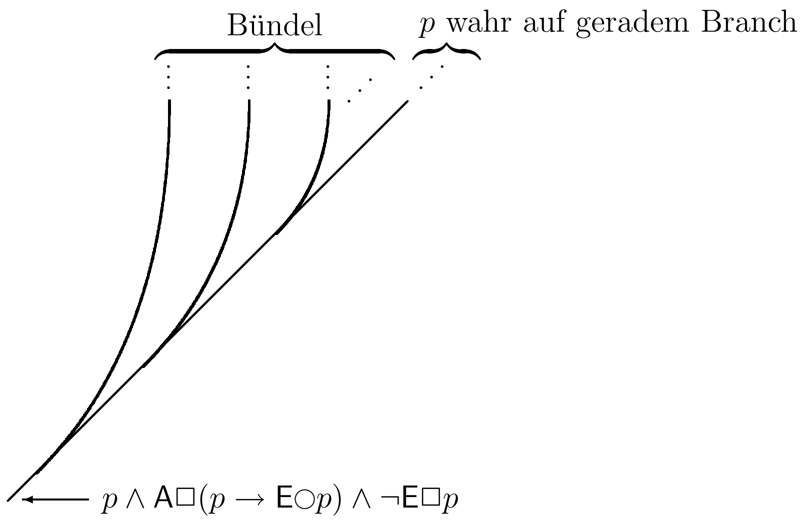
ist nicht erfüllbar aber allgemein erfüllbar — zum Beispiel in einem allgemeinen Modell, basierend auf einem Baum wie in dem Bild auf der folgenden Seite skizziert (das Bündel besteht aus allen gekrümmten Branches, wobei p gerade in den Punkten des gestreckten vollen Branches wahr ist; der Kürze wegen sei p hier lokal — um ein Beispiel in nichtlokaler Semantik zu geben, ersetze man p in obiger Formel durch $\mathsf{A}p$). Der Leser sei für eine weiterführende Diskussion auf [9, 55] verwiesen.

Die Axiomatisierung einer ungebündelten Semantik muß die Existenz von Branches berücksichtigen, die sich aus der *Nicht*erfüllbarkeit solcher Ausdrücke wie dem obigen und damit der Gültigkeit von Formeln der Gestalt

$$(p \wedge \mathsf{A}\Box(p \rightarrow \mathsf{E}\bigcirc p)) \rightarrow \mathsf{E}\Box p$$

ergibt. Ist das Bündel eines allgemeinen Baumes unter Limites (also Branches, die sich als Limes von Anfangssegmenten von Branches dieses Bündels auffassen lassen) abgeschlossen, so läßt sich leicht zeigen, daß dann schon jeder Branch des Baumes Element des Bündels sein muß. Wie wir in dem nachfolgenden Kapitel sehen werden, läßt sich die Abgeschlossenheit der Bündel unter Limites dadurch erzwingen, daß wir Formeln wie der genannten axiomatischen Status verleihen (vergleiche Regel (r4) in Abschnitt 3.2).

Gebündeltes Modell (lokale Semantik, CTL^*):



3 Axiomatisierung

Wir beginnen unsere Untersuchungen über Branching-Time Logiken mit dem Nachweis der Axiomatisierbarkeit von QCTL_1, also des monodischen Fragments von QCTL. Dieses Fragment enthält vereinfacht gesagt ausschließlich all diejenigen $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$-Formeln, deren Temporaloperatoren nur auf solche Teilformeln wirken, die höchstens eine freie Individuenvariable enthalten.

Einleitend werden wir sehen, daß mit QCTL_1 in einem gewissen Sinne schon eine „obere Grenze" einer möglichen Axiomatisierung erreicht ist. Denn wie der folgende Abschnitt zeigen wird, kann noch nicht einmal das Zweivariablenfragment von QCTL rekursiv aufgezählt werden.

3.1 QCTL^2 ist nicht rekursiv aufzählbar

Wir zeigen, daß sich noch nicht einmal die monadischen Zweivariablenfragmente der Logiken QCTL oder $b\mathsf{QCTL}$ rekursiv aufzählen lassen. Das heißt, daß keine Axiomatisierung der Menge aller gültigen $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$-Formeln mit nur höchstens einstelligen Prädikaten und nicht mehr als zwei Individuenvariablen existiert.

Für jedes $n \geq 0$ bezeichne $\mathcal{L}^n_{\mathsf{QCTL}}$ die Menge aller Formeln in $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$, die höchstens n Individuenvariablen enthalten. Darüber hinaus sei für jedes $n \geq 0$, $\mathsf{QCTL}^n = \mathcal{L}^n_{\mathsf{QCTL}} \cap \mathsf{QCTL}$. Es ist bekannt, daß QCTL^1 entscheidbar und folglich axiomatisierbar ist [31].

Für jede $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$-Formel ψ bezeichnen $\mathsf{E}\Diamond^+\psi$ und $\mathsf{A}\Diamond^+\psi$ die $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$-Formeln $\mathsf{E}(\top \mathsf{U} \psi)$ und $\mathsf{A}(\top \mathsf{U} \psi)$. $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$-Formeln der Gestalt $\neg\mathsf{E}\Diamond^+(\neg\psi)$ werden abkürzend geschrieben als $\mathsf{A}\Box^+\psi$ (gelesen: jetzt und immer in der Zukunft ψ). Desweiteren stehe $\mathsf{A}\Diamond\psi$ für $\mathsf{A}\bigcirc\mathsf{A}\Diamond^+\psi$. Endlich bezeichne $\mathsf{A}\Box\psi$ Formeln der Gestalt $\mathsf{A}\bigcirc\mathsf{A}\Box^+\psi$ (immer in der Zukunft ψ). Wir nennen eine $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$-Formel φ *einfach*, wenn φ die folgenden Bedingungen erfüllt:

- die einzigen nicht-temporalen Operatoren in φ sind $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\exists$ und $\forall$ (zum Beispiel enthält φ den Konnektor $\rightarrow$ nicht),

– φ enthält keine temporalen Operatoren außer $\mathsf{A}\bigcirc$, $\mathsf{A}\Diamond^+$, $\mathsf{A}\Diamond$, $\mathsf{A}\Box^+$ und $\mathsf{A}\Box$,

– kein temporaler Operator in φ ist im Wirkungsbereich einer Negation, das heißt für jede Teilformel von φ der Gestalt $\neg\psi$ gilt $\psi \in \mathcal{L}_{\mathsf{QL}}$.

Beispielsweise sind Ausdrücke der Gestalt $\mathsf{A}\Diamond\psi \to \psi'$ keine einfachen Formeln, sie enthalten eine „versteckte" Negation: $\mathsf{A}\Diamond\psi \to \psi'$ ist zunächst logisch äquivalent zu $\neg(\mathsf{A}\Diamond\psi) \vee \psi'$, jedoch ist $\neg(\mathsf{A}\Diamond\psi)$ selbst keine einfache Formel, denn sie enthält einen Temporaloperator im Wirkungsbereich einer Negation. Die Intuition hinter dieser Begriffsbildung ist klar: Keine Teilformel einer einfachen Formel kann die Existenz eines Branches postulieren.

Wir nennen einen Baum *degeneriert*, wenn er ordnungsisomorph zu den natürlichen Zahlen ist; solche Bäume sind nichts anderes als lineare temporale Strukturen (siehe [19]).

Lemma 3. *Sei φ eine einfache $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$-Formel, dann gilt: φ ist erfüllbar in einem (allgemeinen) Modell gdw. φ ist erfüllbar in einem Modell über einem degenerierten Baum.*

Beweis. Wir betrachten den allgemeinen Fall. Die Richtung von Rechts nach Links ist trivial, da natürlich jeder degenerierte Baum ein allgemeiner Baum (mit nur einem Branch) ist. Um die andere Richtung einzusehen, nehmen wir an, daß $\mathcal{M}, w \models^{\mathfrak{f}} \varphi$, wobei $\mathcal{M}$ ein allgemeines Modell der Form $(\mathcal{T}, D, \cdot)$, $\mathcal{T} = (T, <, \mathcal{B})$ ein allgemeiner Baum, $w \in T$ und $\mathfrak{f}$ eine Belegung in $\mathcal{M}$ ist. Per Induktion über φ zeigen wir, daß $\mathcal{M}^\beta, w \models^{\mathfrak{f}} \varphi$ für jeden Branch $\beta \in \mathcal{B}(w)$. Dabei ist $\mathcal{M}^\beta = (\mathcal{T}^\beta, D, \cdot^\beta)$ die Restriktion von $\mathcal{M}$ auf β, das heißt, $\mathcal{T}^\beta = (\beta, <\restriction \beta)$ und $\cdot^\beta = \cdot \restriction \beta$. In der Tat, $\mathcal{M}^\beta$ ist ein Modell über einem degenerierten Baum.

Wir nehmen also an, daß $\mathcal{M}^\beta, w \models^{\mathfrak{f}} \varphi$. Weil φ eine einfache Formel ist, verläuft die Induktion wie folgt: Ist φ atomar oder von der Form $\exists x\psi$, $\forall x\psi$, $\psi_1 \wedge \psi_2$ oder $\psi_1 \vee \psi_2$, wobei ψ, ψ_1 und ψ_2 jeweils einfache $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$-Formeln sind, so folgt die Behauptung unmittelbar per Induktionsvoraussetzung. Hat φ die Form $\neg\psi$ für eine einfache $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$-Formel ψ, so ist $\psi \in \mathcal{L}_{\mathsf{QL}}$, also eine klassische Formel der Prädikatenlogik. Das aber heißt, φ enthält keine Temporaloperatoren. Abermals folgt die Behauptung für φ.

Wir nehmen nun an, daß φ entweder die Form $\mathsf{A}\bigcirc\psi$, $\mathsf{A}\Diamond^+\psi$ oder $\mathsf{A}\Diamond\psi$ hat, wobei ψ eine einfache $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$-Formel ist. Fixiere einen beliebigen Branch $\beta \in \mathcal{B}(w)$. In jedem der drei Fälle existiert ein $v \geq w$, so daß $v \in \beta$ und $\mathcal{M}^\beta, w \models^{\mathfrak{f}} \varphi$. Da $\beta \in \mathcal{B}(v)$, so wissen wir nach Induktionsvoraussetzung, daß $\mathcal{M}^\beta, v \models^{\mathfrak{f}} \psi$. Damit folgt aber sofort $\mathcal{M}^\beta, w \models^{\mathfrak{f}} \varphi$.

Zum Schluß habe φ die Form $\mathsf{A}\Box^+\psi$ (bzw. $\mathsf{A}\Box\psi$), wobei die $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$-Formel ψ einfach sei. Angenommen $\mathcal{M}, w \models^{\mathfrak{f}} \varphi$. Sei $\beta \in \mathcal{B}(w)$. Für jedes $v \in \beta$, so daß $v \geq w$ ($v > w$), gilt demnach $\mathcal{M}, v \models^{\mathfrak{f}} \psi$. Für jedes $v \in \beta$ mit $v \geq w$ ($v > w$) und jedes $\beta' \in \mathcal{B}(v)$ gilt nach Induktionsvoraussetzung, $\mathcal{M}^{\beta'}, v \models^{\mathfrak{f}} \psi$. Insbesondere $\mathcal{M}^\beta, v \models^{\mathfrak{f}} \psi$ für alle $v \in \beta$ mit $v \geq w$ ($v > w$). Also $\mathcal{M}^\beta, w \models^{\mathfrak{f}} \varphi$.

Der Fall in dem φ in einem „ungebündelten" Modell über einem Baum $(T, <)$ erfüllt ist, kann leicht auf den eben gezeigten Fall reduziert werden. Dazu sei $\mathcal{B}$ in $\mathcal{T} = (T, <, \mathcal{B})$ die Menge aller Branches in $(T, <)$. $\Box$

Wir werden nun zeigen, daß das Σ_1^1-vollständige Erfüllbarkeitsproblem des Zweivariablenfragments linearer Temporallogik reduziert werden kann, auf das Erfüllbarkeitsproblem von QCTL^2 und $b\mathsf{QCTL}^2$.

Satz 4. QCTL^2 *und* bQCTL^2 *sind nicht rekursiv aufzählbar.*

Beweis. Es sei daran erinnert, daß die Sprache $\mathcal{L}_{\mathsf{QTL}}$ der quantifizierten linearen Temporallogik QTL über demselben Alphabet definiert ist, wie $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$ — lediglich die Pfadquantoren E und A werden unterdrückt. Sei $\mathcal{L}'_{\mathsf{QTL}}$ die Menge aller Formeln φ in $\mathcal{L}_{\mathsf{QTL}}$, so daß:

– die einzigen nicht-temporalen Operatoren in φ sind $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\exists$ und $\forall$,

– φ enthält keine temporalen Operatoren außer $\bigcirc$, $\Diamond^+$, $\Diamond$, $\Box^+$ und $\Box$,

– kein Temporaloperator in φ steht im Wirkungsbereich einer Negation.

Sei $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathsf{QTL}}$. Angenommen, die einzigen Temporaloperatoren in φ sind $\bigcirc$, $\Diamond^+$, $\Diamond$, $\Box^+$ und $\Box$. Es ist nicht schwer zu sehen, daß bezüglich linearer Temporallogik, φ logisch äquivalent ist zu einer Formel $\varphi' \in \mathcal{L}'_{\mathsf{QTL}}$ (beispielsweise ist die Formel $\neg(Q \to \Diamond^+ P(x))$ äquivalent zu $Q \wedge \Box^+ \neg P(x)$).

Gegeben eine Formel $\varphi \in \mathcal{L}'_{\mathsf{QTL}}$. Wir definieren eine Übersetzung $\hat{\cdot} : \mathcal{L}'_{\mathsf{QTL}} \to \mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$, indem wir ein A vor jeden temporalen Operator in φ schreiben. Das heißt, in φ ersetzen wir jeden Temporaloperator wie folgt:

– $\bigcirc$ durch $\mathsf{A}\bigcirc$,
– $\Diamond^+$ durch $\mathsf{A}\Diamond^+$,
– $\Diamond$ durch $\mathsf{A}\Diamond$,
– $\Box^+$ durch $\mathsf{A}\Box^+$,
– $\Box$ durch $\mathsf{A}\Box$.

Das Ergebnis dieser Ersetzung sei durch $\hat{\varphi}$ bezeichnet. Es ist klar, daß keine Subformel von $\hat{\varphi}$ die Form $\neg\mathsf{A}\Diamond\psi$ haben kann, um nur ein Beispiel zu nennen. Mit anderen Worten, $\hat{\varphi}$ ist einfach.

Eine Kachel $\mathfrak{t}$ ist ein 1×1 Rechteck fester Orientierung, dessen Kanten die Farben *rechts*($\mathfrak{t}$), *links*($\mathfrak{t}$), *oben*($\mathfrak{t}$) und *unten*($\mathfrak{t}$) tragen. Gegeben eine Menge Kacheln $\mathfrak{T} = \{\mathfrak{t}_0, \ldots, \mathfrak{t}_n\}$, $n \geq 0$. Jeder Kachel $\mathfrak{t}_i$ sei ein einstelliges Prädikat P_i zugeordnet. Es bezeichne dann $\varphi_{\mathfrak{T}}$ die Konjunktion der folgenden erststufigen Formeln; dabei stehe $R(x,y)$ abkürzend für $\Diamond(Q_1(x) \wedge Q_2(y))$, Q_1 und Q_2 einstellige Prädikate, x und y Individuenvariablen:

$$\exists x \Box\Diamond(P_0(x) \wedge \Diamond\top),$$

$$\forall x \exists y R(x,y),$$

$$\forall x, y\big((R(x,y) \to \Box R(x,y)) \wedge (\neg R(x,y) \to \Box\neg R(x,y))\big),$$

$$\Box^+ \forall x\Big(\bigvee_{i=0}^{n} P_i(x) \wedge \bigwedge_{i \neq j}(P_i(x) \to \neg P_j(x))\Big),$$

$$\Box^+ \forall x, y\Big(P_i(x) \wedge R(x,y) \;\to \bigvee_{oben(\mathfrak{t}_i)=unten(\mathfrak{t}_j)} P_j(y))\Big),$$

$$\Box^+\forall x\Big(P_i(x) \;\rightarrow\; \bigcirc \bigvee_{\mathit{rechts}(\mathsf{t}_i)=\mathit{links}(\mathsf{t}_j)} P_j(x))\Big).$$

In [29] wird gezeigt, daß $\varphi_{\mathfrak{T}}$ genau dann in einem linearen Modell also einem degenerierten Baum erfüllbar ist, wenn $\mathfrak{T}$ die $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-Ebene periodisch kachelt. Da letzteres Erfüllbarkeitsproblem Σ_1^1-vollständig ist, können wir schließlich wie folgt argumentieren: Wegen $\varphi_{\mathfrak{T}} \in \mathcal{L}'_{\mathsf{QTL}}$ erhalten wir als Folgerung aus Lemma 3, daß $\hat{\varphi}_{\mathfrak{T}}$ erfüllbar ist in einem (allgemeinen) Modell über einem Baum gdw. $\hat{\varphi}_{\mathfrak{T}}$ erfüllbar ist in einem Modell über einem degenerierten Baum. Es ist nicht schwer zu sehen, daß $\hat{\varphi}_{\mathfrak{T}}$ erfüllbar ist in einem Modell über einem degenerierten Baum gdw. $\varphi_{\mathfrak{T}}$ erfüllbar ist in einem Modell über einem degenerierten Baum, das heißt in einer linearen Temporalstruktur.

Die $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$-Formel $\hat{\varphi}_{\mathfrak{T}}$ ist monadisch, das heißt, alle Prädikate in $\hat{\varphi}_{\mathfrak{T}}$ sind höchstens einstellig. Fassen wir die Temporaloperatoren $\Box$, $\Box^+$ und $\bigcirc$ als primitive Operatoren auf, so folgt, daß weder das monadische Zweivariablenfragment von QCTL noch das von $b\mathsf{QCTL}$ rekursiv aufzählbar ist; und das selbst dann, wenn $\Box$, $\Box^+$ und $\bigcirc$ die einzigen temporalen Operatoren sind. Entsprechend gilt, daß QCTL^n und $b\mathsf{QCTL}^n$, für alle $n > 1$ sowie QCTL und $b\mathsf{QCTL}$ nicht axiomatisierbar sind. $\Box$

Wir bemerken, daß $\hat{\varphi}_{\mathfrak{T}}$ Subformeln der Gestalt $\Diamond\psi(x, y)$ enthält, in denen der Temporaloperator $\Diamond$ auf zwei verschiedene Individuenvariablen wirkt. Wir werden daher das sogenannte *monodische Fragment* von $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$ betrachten, daß keine Formeln dieser Gestalt enthält.

Definition 5 (Monodische Formeln). Eine $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$-Formel φ heißt *monodisch*, wenn keine Subformel von φ der Form $\mathsf{E}\bigcirc\psi$, $\mathsf{A}\bigcirc\psi$, $\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ oder $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ mehr als eine freie Individuenvariable enthält. Die Menge aller monodischen Formeln, das *monodische Fragment* von $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$, wird mit $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$ bezeichnet.

Wir bezeichnen mit QCTL_1 ($b\mathsf{QCTL}_1$) das monodische Fragment von QCTL ($b\mathsf{QCTL}$), also $\mathsf{QCTL} \cap \mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$ ($b\mathsf{QCTL} \cap \mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$).

3.2 Axiomensystem

Ausgehend von der in [15] vorgestellten Axiomatisierung $\mathcal{CTL}$ der Propositionallogik CTL schlagen wir die unten aufgeführte Axiomatisierung $\mathcal{QCTL}_1$ von QCTL_1 vor. Neben den üblichen Regeln und Axiomen der klassischen Prädikatenlogik ergänzen wir in $\mathcal{CTL}$ die *Barcan-Formel* (a5) und erhalten das folgende Axiomensystem:

Axiomenschemata (über Formeln in $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$)

(a1) die Menge der Axiomenschemata einer Axiomatisierung der klassischen Prädikatenlogik,

(a2) $\mathsf{E}\bigcirc\top$, $\mathsf{A}\bigcirc\top$,

(a3) $\mathsf{E}\bigcirc\psi \leftrightarrow \neg\mathsf{A}\bigcirc\neg\psi$, (a4) $\mathsf{E}\bigcirc(\psi_1 \vee \psi_2) \leftrightarrow (\mathsf{E}\bigcirc\psi_1 \vee \mathsf{E}\bigcirc\psi_2)$,

(a5) $\mathsf{E}\bigcirc\exists x\psi \leftrightarrow \exists x\mathsf{E}\bigcirc\psi$,

(a6) $\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \leftrightarrow \psi_2 \vee (\psi_1 \wedge \mathsf{E}\bigcirc(\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2))$,

(a7) $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \leftrightarrow \psi_2 \vee (\psi_1 \wedge \mathsf{A}\bigcirc(\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2))$.

Schlußregeln (über Formeln in $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$)

(r1) die Regeln des Axiomensystems der Prädikatenlogik,

(r2) $\dfrac{\psi_1 \rightarrow \psi_2}{\mathsf{A}\bigcirc\psi_1 \rightarrow \mathsf{A}\bigcirc\psi_2}$,

(r3) $\dfrac{\vartheta \rightarrow \neg\psi_2 \wedge \mathsf{A}\bigcirc(\vartheta \vee \neg(\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2))}{\vartheta \rightarrow \neg(\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2)}$,

(r4) $\dfrac{\vartheta \rightarrow \neg\psi_2 \wedge \mathsf{E}\bigcirc\vartheta}{\vartheta \rightarrow \neg(\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2)}$.

Regeln der Form (r4) tragen in der Literatur den Namen *Limit Closure* [47]. Sie sorgen dafür, daß auch tatsächlich der „Limes-Branch" aus Bild 1, also der gestreckte Zweig auf dem p wahr ist, innerhalb des Bündels liegt.

Wie üblich binde $\neg$, $\bigcirc$ und $\forall$ stärker als $\wedge$, $\vee$ und U sowie letztere wiederum stärker als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$. Das Axiomensystem $\mathcal{QCTL}_1$ ergänzt um

(a8) $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \rightarrow \mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$,

jedoch ohne (r4), wird mit $b\mathcal{QCTL}_1$ bezeichnet. Wir bezeichnen mit $\vdash$ und $\vdash^b$ die Konsequenzrelation, die durch $\mathcal{QCTL}_1$ bzw. $b\mathcal{QCTL}_1$ bestimmt wird. Mit anderen Worten, für alle Mengen $\Delta \subseteq \mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$ und jede $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$-Formel φ gilt $\Delta \vdash \varphi$ ($\Delta \vdash^b \varphi$) gdw. es existiert eine endliche Folge $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$, $n \geq 0$, von $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$-Formeln, so daß $\psi_j = \varphi$ für ein $j \leq n$ und für alle $i \leq n$:

- entweder $\psi_i \in \Delta$ oder
- ψ_i ist eine Instanz eines Axioms aus $\mathcal{QCTL}_1$ ($b\mathcal{QCTL}_1$) oder
- wenn $i > 0$, dann ist ψ_i das Resultat einer Anwendung einer Regel aus $\mathcal{QCTL}_1$ ($b\mathcal{QCTL}_1$) auf Formeln in $\{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{i-1}\}$.

Unser Ziel ist es zu zeigen, daß $\mathcal{QCTL}_1$ und $b\mathcal{QCTL}_1$ *korrekt* und *vollständig* sind bezüglich QCTL_1 bzw. $b\mathsf{QCTL}_1$:

Satz 6. *Für jede $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$-Formel φ gilt:*

$$\begin{array}{lll} \vdash \varphi & \textit{gdw.} & \varphi \in \mathsf{QCTL}, \\ \vdash^b \varphi & \textit{gdw.} & \varphi \in b\mathsf{QCTL}. \end{array}$$

Die Implikation von Links nach Rechts (Korrektheit) läßt sich sofort einsehen. Als Beispiel sei hier lediglich die Regel (r3) für den allgemeinen Fall betrachtet. Nimm an, es existieren $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$-Formeln ϑ, ψ_1 und ψ_2 derart, daß $\mathcal{M}, w, \mathfrak{f} \models \vartheta \wedge \mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$, für ein Modell $\mathcal{M} = (\mathcal{T}, D, I)$, wobei $\mathcal{T} = (T, <, \mathcal{B})$, $w \in T$ und $\mathfrak{f}$ ist eine Belegung in $\mathcal{M}$. Wir nehmen nun an, daß $\vartheta \to \neg\psi_2 \wedge \mathsf{A}\bigcirc(\vartheta \vee \neg(\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2))$ allgemein gültig ist.

Wegen $\mathcal{M}, w, \mathfrak{f} \models \vartheta$ und $\mathcal{M}, w, \mathfrak{f} \models \vartheta \to \neg\psi_2 \wedge \mathsf{A} \bigcirc (\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \to \vartheta)$ (beachte, daß $(\vartheta \vee \neg(\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2)) \leftrightarrow (\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \to \vartheta)$ allgemein gültig ist) haben wir zunächst $\mathcal{M}, w, \mathfrak{f} \models \neg\psi_2$ und $\mathcal{M}, w, \mathfrak{f} \models \mathsf{A} \bigcirc (\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \to \vartheta)$.

Auf der anderen Seite gilt $\mathcal{M}, w, \mathfrak{f} \models \mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$. Also existiert ein $v \geq w$, so daß

$$\mathcal{M}, v, \mathfrak{f} \models \psi_2 \tag{1}$$

und $\mathcal{M}, u, \mathfrak{f} \models \psi_1$, wenn immer $w \leq u < v$. Das heißt $\mathcal{M}, u, \mathfrak{f} \models \mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$, für alle $w \leq u < v$.

Induktiv nimm an, es existiert ein $u \in [w, v)$, so daß $\mathcal{M}, u', \mathfrak{f} \models \vartheta$ für alle $u' \in [w, u]$. Dann gilt sowohl $\mathcal{M}, u', \mathfrak{f} \models \neg\psi_2$ als auch $\mathcal{M}, u', \mathfrak{f} \models \mathsf{A} \bigcirc (\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \to \vartheta)$, für alle solche u'. Insbesondere $\mathcal{M}, u, \mathfrak{f} \models \mathsf{A} \bigcirc (\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \to \vartheta)$. Daher $\mathcal{M}, u'', \mathfrak{f} \models \mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \to \vartheta$, für den direkten Nachfolger $u'' \leq v$ von u in $\mathcal{T}$. Also $\mathcal{M}, u'', \mathfrak{f} \models \vartheta$ wegen $\mathcal{M}, u, \mathfrak{f} \models \mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$, für alle $u \in [w, v)$, und demzufolge $\mathcal{M}, u'', \mathfrak{f} \models \neg\psi_2$. Auf diese Weise erhalten wir $\mathcal{M}, v, \mathfrak{f} \models \neg\psi_2$, im Widerspruch zu (1). Wir wenden uns nun dem Nachweis der Implikation von Rechts nach Links (Vollständigkeit) in Theorem 6.

Im weiteren machen wir immer wieder Gebrauch von einigen wichtigen logischen Konsequenzen in $\mathcal{QCTL}_1$ und $b\mathcal{QCTL}_1$. Dazu das folgende Lemma.

Lemma 7. *Seien ψ, ψ_1 und ψ_2 monodische $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$-Formeln. Die folgenden Formeln sind ableitbar in $\mathcal{QCTL}_1$ und $b\mathcal{QCTL}_1$:*

(i) $\mathsf{A}\bigcirc(\psi_1 \wedge \psi_2) \leftrightarrow (\mathsf{A}\bigcirc\psi_1 \wedge \mathsf{A}\bigcirc\psi_2)$,

(ii) $\mathsf{A}\bigcirc\psi \to \mathsf{E}\bigcirc\psi$,

(iii) $(\mathsf{A}\bigcirc\psi_1 \wedge \mathsf{E}\bigcirc\psi_2) \to \mathsf{E}\bigcirc(\psi_1 \wedge \psi_2)$,

(iv) $\mathsf{E}\bigcirc(\psi_1 \wedge \psi_2) \to (\mathsf{E}\bigcirc\psi_1 \wedge \mathsf{E}\bigcirc\psi_2)$.

Zusätzlich ist die folgende Regel ableitbar in $\mathcal{QCTL}_1$ und $b\mathcal{QCTL}_1$:

(v) $\dfrac{\psi_1 \to \psi_2}{\mathsf{E}\bigcirc\psi_1 \to \mathsf{E}\bigcirc\psi_2}$.

Beweis. Wir betrachten lediglich $\mathcal{QCTL}_1$. (i) Dies ist eine unmittelbare Konsequenz von (a1), (a4) und (a3).

(ii) Als Instanz von (a4) haben wir $\mathsf{E}\bigcirc(\neg\psi_1 \vee \psi_2) \leftrightarrow (\mathsf{E}\bigcirc\neg\psi_1 \vee \mathsf{E}\bigcirc\psi_2)$. Das heißt, $\vdash \mathsf{E}\bigcirc(\psi_1 \to \psi_2) \leftrightarrow (\mathsf{A}\bigcirc\psi_1 \to \mathsf{E}\bigcirc\psi_2)$. Sei $\psi = \psi_1 = \psi_2$. Es ist klar, daß $\vdash (\psi \to \psi) \leftrightarrow \top$. Also $\vdash \mathsf{E}\bigcirc\top \to (\mathsf{A}\bigcirc\psi \to \mathsf{E}\bigcirc\psi)$. Es folgt mit (a2), daß $\vdash \mathsf{A}\bigcirc\psi \to \mathsf{E}\bigcirc\psi$.

(iii) Beachte das mit Kontraposition $\vdash (\mathsf{A}\bigcirc\psi_1 \wedge \mathsf{E}\bigcirc\psi_2) \to \mathsf{E}\bigcirc(\psi_1 \wedge \psi_2)$ gdw. $\vdash \mathsf{A}\bigcirc(\psi_1 \to \neg\psi_2) \to (\mathsf{A}\bigcirc\psi_1 \to \mathsf{A}\bigcirc\neg\psi_2)$. Es genügt also für beliebige Formeln ψ_1 und ψ_2 zu zeigen :

$$\vdash (\mathsf{A}\bigcirc(\psi_1 \to \psi_2) \wedge \mathsf{A}\bigcirc\psi_1) \to \mathsf{A}\bigcirc\psi_2.$$

Es ist klar, daß mit (i)

$$\vdash (\mathsf{A}\bigcirc(\psi_1 \to \psi_2) \wedge \mathsf{A}\bigcirc\psi_1) \to \mathsf{A}\bigcirc((\psi_1 \to \psi_2) \wedge \psi_1).$$

Da wegen klassischer Prädikatenlogik $\vdash ((\psi_1 \to \psi_2) \wedge \psi_1) \to \psi_2$, so gilt unter Benutzung von (r2)

$$\vdash \mathsf{A}\bigcirc((\psi_1 \to \psi_2) \wedge \psi_1) \to \mathsf{A}\bigcirc\psi_2.$$

Das aber zeigt (iii).

(iv) Klassisch gilt für beliebige Formeln ψ_1 und ψ_2: $\vdash \psi_1 \to (\psi_1 \vee \psi_2)$. Mit (r2) folgt dann

$$\vdash \mathsf{A}\bigcirc\psi_1 \to \mathsf{A}\bigcirc(\psi_1 \vee \psi_2).$$

Analog erhalten wir $\vdash \mathsf{A}\bigcirc\psi_2 \to \mathsf{A}\bigcirc(\psi_1 \vee \psi_2)$, und daher muß gelten:

$$\vdash (\mathsf{A}\bigcirc\psi_1 \vee \mathsf{A}\bigcirc\psi_2) \to \mathsf{A}\bigcirc(\psi_1 \vee \psi_2).$$

Kontraposition liefert das Ergebnis.

(v) Um dies einzusehen, betrachte (r2) mit Blick auf $\vdash \neg\psi_2 \to \neg\psi_1$, und dann (a3) in Bezug auf $\vdash \mathsf{A}\bigcirc\neg\psi_2 \to \mathsf{A}\bigcirc\neg\psi_1$. □

Für beliebige endliche Formelmengen Γ bezeichne $\bigvee\Gamma$ die Disjunktion über alle Formeln in Γ. Wir sagen, daß eine Formel φ *konsistent* ist mit $\mathcal{QCTL}_1$ ($b\mathcal{QCTL}_1$), wenn $\nvdash \neg\varphi$ ($\nvdash^b \neg\varphi$). Mit Lemma 7 können wir jetzt eine einfache, aber im weiteren sehr hilfreiche Konsequenz beweisen:

Korollar 8. *Seien Γ und Δ endliche aber nicht-leere Mengen monodischer Formeln. Angenommen,*

$$\mathsf{A}\bigcirc(\bigvee\Gamma) \wedge \mathsf{E}\bigcirc(\neg\bigvee\Delta)$$

ist konsistent mit $\mathcal{QCTL}_1$ ($b\mathcal{QCTL}_1$). Dann existiert ein $\psi \in \Gamma\setminus\Delta$, so daß $\mathsf{E}\bigcirc\psi$ konsistent ist mit $\mathcal{QCTL}_1$ ($b\mathcal{QCTL}_1$).

Beweis. Wir betrachten lediglich $\mathcal{QCTL}_1$. In klassischer Prädikatenlogik gilt $\vdash (\bigvee\Gamma \wedge \neg\bigvee\Delta) \to \bigvee\Gamma\setminus\Delta$, und daher erhalten wir mit Lemma 7(iv) $\vdash \mathsf{E}\bigcirc(\bigvee\Gamma \wedge \neg\bigvee\Delta) \to \mathsf{E}\bigcirc(\bigvee\Gamma\setminus\Delta)$. Mit Lemma 7(v) haben wir dann schließlich

$$\vdash \mathsf{A}\bigcirc(\bigvee\Gamma) \wedge \mathsf{E}\bigcirc(\neg\bigvee\Delta) \to \mathsf{E}\bigcirc(\bigvee\Gamma\setminus\Delta). \tag{2}$$

Es ist klar, daß jede logische Konsequenz einer mit $\mathcal{QCTL}_1$ konsistenten Formel ebenfalls konsistent sein muß mit $\mathcal{QCTL}_1$. Also angenommen $\mathsf{A}\bigcirc(\bigvee\Gamma) \wedge \mathsf{E}\bigcirc(\neg\bigvee\Delta)$ ist konsistent mit $\mathcal{QCTL}_1$. Mit (2) folgt, daß dann $\mathsf{E}\bigcirc(\bigvee\Gamma\setminus\Delta)$ ebenfalls konsistent sein muß mit $\mathcal{QCTL}_1$. Die Behauptung folgt nun unmittelbar mit (a4). □

Um die Vollständigkeit von $\mathcal{QCTL}_1$ zu beweisen werden wir zeigen, daß wenn $\not\vdash \varphi$ für eine $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$-Formel φ, dann existiert ein Modell, daß φ widerlegt. Mit anderen Worten, wir werden für beliebige $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$-Formeln φ zeigen: Ist φ konsistent mit $\mathcal{QCTL}_1$, dann ist φ schon erfüllbar in einem Modell. Haben wir einmal dieses, dann sind wir auch in der Lage, die Vollständigkeit von $b\mathcal{QCTL}_1$ zu prüfen: Ist die $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$-Formel φ konsistent mit $b\mathcal{QCTL}_1$, dann ist φ erfüllbar in einem allgemeinen Modell. Wir werden also ein Verfahren benötigen, um entsprechende Modelle konstruieren zu können.

3.3 Quasimodelle

Wie in [52] werden wir die für unsere Zwecke modifizierte Methode der *Quasimodelle* nutzen. Für eine $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$-Formel φ bezeichne $sub\varphi$ die kleinste Menge von Formeln, die alle Teilformeln von φ und deren Negate enthält, so daß

– wenn $\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in sub\varphi$, dann auch $\mathsf{E}\bigcirc(\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2) \in sub\varphi$, (3.1)

– wenn $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in sub\varphi$, dann auch $\mathsf{A}\bigcirc(\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2) \in sub\varphi$. (3.2)

Es ist klar, daß $sub\varphi$ endlich ist. Es bezeichne $sub_n\varphi$, $n \geq 0$, diejenige Teilmenge von $sub\varphi$, die nur solche Formeln enthält, die höchstens n freie Variablen besitzen. Sei x eine Variable, die nicht in φ vorkommt. Wir setzen

$$sub_x\varphi = \{\psi(x/y) \mid \psi(y) \in sub_1\varphi\}.$$

Definition 9 (Typ). Ein *Typ* für φ ist eine Boolsch saturierte Teilmenge t von $sub_x\varphi$, so daß

- $\psi_1 \wedge \psi_2 \in t$ gdw. $\psi_1 \in t$ und $\psi_2 \in t$ für alle $\psi_1, \psi_2 \in sub_x\varphi$,
- $\neg\psi \in t$ gdw. $\psi \notin t$ für alle $\psi \in sub_x\varphi$.

Wir sagen, daß zwei Typen t und t' *auf $sub_0\varphi$ übereinstimmen*, wenn $t \cap sub_0\varphi = t' \cap sub_0\varphi$.

Jeder *State* w in einem Modell kann (modulo φ) charakterisiert werden durch die Menge aller Typen, die in ihm realisiert werden. Das motiviert die folgende Definition.

Definition 10 (State Candidate). Eine Menge S von Typen für φ die auf $sub_0\varphi$ übereinstimmen, heißt *State Candidate für φ*. Ein *Pointed State Candidate* für φ ist ein Paar $\mathcal{P} = (S, t)$, wobei S ein State Candidate für φ ist und $t \in S$.

Da wir sowohl QCTL_1 als auch $b\mathsf{QCTL}_1$ axiomatisieren wollen, haben wir einerseits zwischen der Konsistenz bezüglich $\mathcal{QCTL}_1$ und andererseits der Konsistenz bezüglich $b\mathcal{QCTL}_1$ zu unterscheiden. Alle weiteren Definitionen und Begriffe in diesem Abschnitt müssen also in bezug auf $\mathcal{QCTL}_1$ als auch in bezug auf $b\mathcal{QCTL}_1$ gelesen werden (letzteres gekennzeichnet durch Klammern).

Gegeben ein State Candidate S für φ und ein Pointed State Candidate $\mathcal{P} = (S, t)$. Wir setzen

$$\begin{aligned} \alpha_S &= \bigwedge_{t \in S} \exists x\ t(x) \ \wedge\ \forall x \bigvee_{t \in S} t(x) \\ \beta_{\mathcal{P}} &= \alpha_S \wedge t. \end{aligned}$$

S und $\mathcal{P}$ heißen ($b\mathcal{QCTL}_1$-) $\mathcal{QCTL}_1$-*konsistent*, wenn die Formeln α_S bzw. $\beta_{\mathcal{P}}$ konsistent sind mit $\mathcal{QCTL}_1$ ($b\mathcal{QCTL}_1$).

Wir kommen nun zu dem unsere ganze Arbeit begleitenden Begriff des Suitable Pairs:

Definition 11 (Suitable Pair). (i) Ein Paar (t_1, t_2) von Typen für φ heißt *suitable* in $\mathcal{QCTL}_1$ ($b\mathcal{QCTL}_1$), wenn die Formel $t_1 \wedge \mathsf{E}\bigcirc t_2$ konsistent ist mit $\mathcal{QCTL}_1$ ($b\mathcal{QCTL}_1$). In diesem Fall schreiben wir $t_1 \prec t_2$ ($t_1 \prec^b t_2$).

(ii) Ein Paar von State Candidates (S_1, S_2) heißt *suitable in* $\mathcal{QCTL}_1$ ($b\mathcal{QCTL}_1$), wenn die Formel $\alpha_{S_1} \wedge \mathsf{E}\bigcirc\alpha_{S_2}$ konsistent ist mit $\mathcal{QCTL}_1$ ($b\mathcal{QCTL}_1$). In diesem Fall schreiben wir $S_1 \prec S_2$ ($S_1 \prec^b S_2$).

(iii) Ein Paar $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ von Pointed State Candidates für φ heißt *suitable in* $\mathcal{QCTL}_1$ ($b\mathcal{QCTL}_1$), wenn die Formel $\beta_{\mathcal{P}_1} \wedge \mathsf{E}\bigcirc\beta_{\mathcal{P}_2}$ konsistent ist mit $\mathcal{QCTL}_1$ ($b\mathcal{QCTL}_1$). In diesem Fall schreiben wir $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2$ ($\mathcal{P}_1 \prec^b \mathcal{P}_2$).

Wir nennen zwei Elemente w und w' eines Baumes $(T, <)$ *benachbart*, wenn $w < w'$ und $w < v < w'$ für kein $v \in T$. Suitability bedeutet intuitiv, daß zwei Typen (oder State Candiates) die Beschreibungen eines Individuums in benachbarten Zeitpunkten (bzw. die Beschreibungen zweier benachbarter States in einem Modell) sein können. Entsprechend lassen sich State Candidates auf die folgende Weise organisieren:

Definition 12 ($\mathcal{QCTL}_1$-State Function). Eine $\mathcal{QCTL}_1$-*State Function* für φ über einem Baum $(T, <)$ ist eine Abbildung f, die jedem $w \in T$ einen $\mathcal{QCTL}_1$-konsistenten State Candidate $f(w) = S_w$ für φ zuordnet, so daß $S_w \prec S_{w'}$ für alle benachbarten $w, w' \in T$.

Eine $b\mathcal{QCTL}_1$-State Function für φ über einem Baum $(T, <)$ oder einem allgemeinen Baum $(T, <, \mathcal{B})$ ist eine Abbildung f, die jedem $w \in T$ einen $b\mathcal{QCTL}_1$-konsistenten State Candidate $f(w) = S_w$ für φ zuordnet, so daß $S_w \prec^b S_{w'}$, für alle benachbarten $w, w' \in T$.

Zwei Elemente w und w' eines Baumes $\mathcal{T} = (T, <)$ bestimmen auf die übliche Weise Intervalle in $\mathcal{T}$. Zum Beispiel bezeichnet das Intervall $[w, w')$ die möglicherweise leere Menge derjenigen $v \in T$ für die $w \leq v < w'$. Sei $\mathcal{T} = (T, <)$ ein Baum, $w \in T$ und β ein Branch in $\mathcal{T}$. Wir sagen β *komme* oder *verlaufe durch* w, wenn $w \in \beta$.

Individuen haben eine Geschichte, sie sind nicht einzelnen Zeitpunkten zuzuordnen. Ein Individuum wird in einer State Function daher am ehesten selbst durch eine Funktion repräsentiert:

Definition 13 (Run). Sei $\mathcal{T}$ ein (allgemeiner) Baum $(T, <)$ (bzw. $(T, <, \mathcal{B})$) und f eine ($b\mathcal{QCTL}_1$-) $\mathcal{QCTL}_1$-State Function für φ über $\mathcal{T}$. Ein *Run* in f ist eine Funktion r, die jedes $w \in T$ auf ein $r(w) \in S_w$ abbildet, so daß

- $r(w) \prec r(w')$ ($r(w) \prec^b r(w')$) für alle benachbarten $w, w' \in T$,

- für alle Formeln der Gestalt $\mathsf{E}\bigcirc\psi \in sub_x\varphi$: $\mathsf{E}\bigcirc\psi \in r(w)$ gdw. es existiert ein direkter Nachfolger w' von w in $\mathcal{T}$, so daß $\psi \in r(w')$,

- für alle Formeln der Gestalt $\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in sub_x\varphi$: $\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in r(w)$ gdw. es existiert ein $v \geq w$, so daß $\psi_2 \in r(v)$, und $\psi_1 \in r(u)$ für alle u mit $u \in [w, v)$, das heißt, $w \leq u < v$,

- für alle Formeln der Gestalt $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in sub_x\varphi$: $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in r(w)$ gdw. für alle Branches β in $\mathcal{T}$ (für alle $\beta \in \mathcal{B}(w)$) die durch w kommen, existiert ein $v \in \beta$ mit $v \geq w$, so daß $\psi_2 \in r(v)$, und $\psi_1 \in r(u)$, wenn immer $u \in [w, v)$.

Definition 14 (Quasimodell). Eine ($b\mathcal{QCTL}_1$-) $\mathcal{QCTL}_1$-State Function f für φ über einem (allgemeinen) Baum $\mathcal{T}$ der Form $(T, <)$ ($(T, <, \mathcal{B})$) heißt (allgemeines) *Quasimodell* für φ über $\mathcal{T}$, wenn für jedes $w \in T$ und alle $t \in S_w$ ein Run r in f existiert mit $r(w) = t$.

Wir sagen, daß φ *erfüllt* wird in f, wenn es ein $w \in T$ gibt und $\varphi \in t$ für mindestens ein $t \in f(w)$.

Wir werden jetzt sehen, daß der Begriff eines Quasimodells in einem bestimmten Sinne adäquat ist für unsere Zwecke. Gegeben ein Quasimodell f und eine Formel φ. Wir können zeigen: Erfüllt f die Formel φ, dann läßt sich aus f ein QCTL-Modell gewinnen, das dieselbe Formel erfüllt. Sei umgekehrt ein QCTL-Modell $\mathcal{M}$ gegeben, das eine Formel φ erfüllt. Dann kann $\mathcal{M}$ in ein Quasimodell umgewandelt werden, das φ ebenfalls erfüllt. Dasselbe gilt natürlich ebenso für den Fall allgemeiner Modelle bzw. Quasimodelle.

Zu diesem Zweck reservieren wir für jede $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$-Formel $\varphi(x)$ der Gestalt $\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$, $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$, $\mathsf{E}\bigcirc\psi$ oder $\mathsf{A}\bigcirc\psi$, abzählbar viele einstellige Prädikate $P_\varphi(x)$ und für jeden Satz φ dieser Form, fixieren wir abzählbar viele Aussagenvariablen p_φ. Die Prädikate $P_\varphi(x)$ und p_φ heißen *Surrogate* von $\varphi(x)$ bzw. φ.

Gegeben eine $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$-Formel φ. Wir bezeichnen mit $\overline{\varphi}$ diejenige Formel, die aus φ durch Ersetzung aller ihrer Teilformeln der Gestalt $\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$, $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$, $\mathsf{E}\bigcirc\psi$ oder $\mathsf{A}\bigcirc\psi$, die sich nicht im Wirkungsbereich des Vorkommens eines anderen Temporaloperators befinden, durch ihre Surrogate hervorgeht. Folglich ist $\overline{\varphi}$ eine reine $\mathcal{L}$-Formel. Wir nennen $\overline{\varphi}$ das *$\mathcal{L}$-Redukt* von φ.

Die Idee hinter dieser Definition ist die folgende. Die Redukte $\overline{\varphi}$ „abstrahieren“ von den temporalen Komponenten in φ und können auf diesem Wege in klassischen erststufigen Strukturen bewertet werden. Später werden wir dann stets in der Lage sein, den Wahrheitswert von φ in temporalen Modellen aus dem Wahrheitswert der $\overline{\varphi}$ zu rekonstruieren.

Lemma 15. *Sei $\kappa \geq \aleph_0$ eine beliebige Kardinalzahl. Zu jedem ($b\mathcal{QCTL}_1$-) $\mathcal{QCTL}_1$-konsistenten State Candidate S existiert eine erststufige Struktur $\mathcal{M} = (D, P_0, P_1, \ldots)$, so daß $\mathcal{M} \models \overline{\alpha}_S$. Darüber hinaus können wir $\mathcal{M}$ derart wählen, daß für jedes $t \in S$,*

$$|\{a \in D \,|\, \mathcal{M} \models \overline{t}\,[a]\}| = \kappa.$$

Beweis. Wir betrachten lediglich $\mathcal{QCTL}_1$; der Beweis für $b\mathcal{QCTL}_1$ verläuft ganz analog. Angenommen $\mathcal{M} \not\models \overline{\alpha}_S$ für jede erststufige Struktur $\mathcal{M}$. Aus dem Gödelschen Vollständigkeitssatz folgt, daß $\overline{\alpha}_S$ nicht konsistent bezüglich der klassischen Prädikatenlogik sein kann. Es ist nun leicht einzusehen, daß dann α_S nicht konsistent sein kann mit $\mathcal{QCTL}_1$, da $\mathcal{QCTL}_1$ die klassische Prädikatenlogik erweitert. Das aber steht im Widerspruch zur $\mathcal{QCTL}_1$-Konsistenz von S. Daher $\mathcal{M} \models \overline{\alpha}_S$ für eine erststufige Struktur $\mathcal{M}$.

Da die Sprache $\mathcal{L}$ abzählbar ist und nicht das Gleichheitssymbol enthält, folgt die zweite Behauptung unmittelbar aus der klassischen Modelltheorie. $\square$

Lemma 16. *Ein monodischer $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$-Satz φ ist (allgemein) erfüllbar gdw. φ erfüllbar ist in einem (allgemeinen) Quasimodell für φ.*

Beweis. Es reicht, den allgemeinen Fall zu untersuchen, denn der „ungebündelte" Fall verläuft ganz analog, einfach durch Unterdrückung der Mengen $\mathcal{B}$ in dem folgenden Beweis.

Für die Richtung von Rechts nach Links nehmen wir an, daß φ in einem allgemeinen Modell $\mathcal{M} = (\mathcal{T}, D, I)$ erfüllt wird, worin $\mathcal{T} = (T, <, \mathcal{B})$ ein allgemeiner ω-Baum ist. Für jedes $a \in D$ sei $\mathfrak{f}_a$ diejenige Belegung in $\mathcal{M}$, so daß $\mathfrak{f}_a(x) = a$ für alle $x \in var$. Für jedes $w \in T$ setze

$$f(w) = \{tp(w, a) \mid a \in D\},$$

wobei

$$tp(w, a) = \{\psi \in sub_x\varphi \mid \mathcal{M}, w, \mathfrak{f}_a \models \psi\}.$$

Wir zeigen, daß f eine $b\mathcal{QCTL}_1$-State Function über $\mathcal{T}$ ist. Dazu haben wir zunächst zu überprüfen, ob jedes $f(w)$, $w \in T$, ein $b\mathcal{QCTL}_1$-konsistenter State Candidate für φ ist. Zu diesem Zweck betrachte ein beliebiges $w \in T$ und setze $S = f(w)$. Angenommen $\vdash^b \neg\alpha_S$, das heißt $\neg\alpha_S \in b\mathsf{QCTL}_1$, nach Korrektheit in Theorem 6. Es ist klar, daß dann einerseits $\mathcal{M}, w, \mathfrak{f} \models \alpha_S$, für jede Belegung $\mathfrak{f}$ in $\mathcal{M}$, und andererseits aber $\mathcal{M}, w, \mathfrak{f} \models \neg\alpha_S$, da $\neg\alpha_S \in b\mathsf{QCTL}_1$. Das ist ein Widerspruch.

Fixiere nun einen direkten Nachfolger w' von w in $\mathcal{T}$ und setze $S' = f(w')$. Wir bemerken lediglich, daß $\mathcal{M}, w, \mathfrak{f} \models \alpha_S \wedge \mathsf{E}\bigcirc\alpha_{S'}$ und daher $\not\vdash^b \neg(\alpha_S \wedge \mathsf{E}\bigcirc\alpha_{S'})$. Also gilt $S \prec^b S'$.

Es ist nun leicht einzusehen, daß für jedes $a \in D$ die Funktion $r_a(w) = tp(w, a)$, $w \in T$, ein Run ist in f. Wir zeigen lediglich, daß $r_a(w) \prec^b r_a(w')$ für beliebige direkte Nachfolger w' von w. Klar, $\mathcal{M}, w, \mathfrak{f}_a \models r_a(w) \wedge \mathsf{E}\bigcirc r_a(w')$ und daher $\not\vdash^b \neg(r_a(w) \wedge \mathsf{E}\bigcirc r_a(w'))$. In der Tat, f ist ein allgemeines Quasimodell über $\mathcal{T}$, das φ erfüllt.

Umgekehrt, sei f ein allgemeines Quasimodell für φ über einem allgemeinen ω-Baum $\mathcal{T} = (T, < \mathcal{B})$, das φ erfüllt. Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller Runs in f. Fixiere eine beliebige Kardinalzahl κ mit $\aleph_0 \leqslant \kappa$, die die Kardinalität von $\mathcal{R}$ übersteigt. Setze $D = \mathcal{R} \times \kappa$. Damit gilt für jedes $w \in W$ und alle Typen t,

$$|\{(r, \mu) \in D \mid r(w) = t\,,\ \mu < \kappa\}| = \begin{cases} \kappa & \text{falls } t \in S_w, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Lemma 15 finden wir für jedes $w \in T$ eine erststufige $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}_w$ mit Domain D, so daß $\mathcal{M}_w \models \overline{\alpha}_{S_w}$, wobei $S_w = f(w)$, und

$$r(w) = \{\psi \in sub_x\varphi \,|\, \mathcal{M}_w \models \overline{\psi}\,[(r,\mu)]\},$$

mit $r \in \mathcal{R}$ und $\mu < \kappa$. Mit anderen Worten: $\mathcal{M}_w, \mathfrak{f} \models \overline{\psi}$ gdw. $\psi \in r(w)$, wobei $\mathfrak{f}(x) = (r,\mu)$ für ein $\mu < \kappa$ und $r \in \mathcal{R}$.

Sei $\mathcal{M} = (\mathcal{T}, D, I)$ und $\mathfrak{f}$ eine Belegung in $\mathcal{M}$. Wir zeigen per Induktion über ψ, daß für alle $\psi \in sub_x\varphi$ und alle $w \in T$,

$$\mathcal{M}_w, \mathfrak{f} \models \overline{\psi} \;\;\Leftrightarrow\;\; \mathcal{M}, w, \mathfrak{f} \models \psi.$$

Dabei betrachten wir lediglich die Fälle, in denen ψ die Form $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ und $\mathsf{E}\bigcirc\chi$ hat.

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{M}_w, \mathfrak{f} \models P_\psi & \Leftrightarrow & \mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in r(w), \text{ für ein } r \in \mathcal{R} \\
& \Leftrightarrow & \text{für alle } \beta \in \mathcal{B}(w) \text{ existiert ein } v \in \beta \text{ mit } v \geq w, \text{ so daß} \\
& & \psi_2 \in r(v) \text{ und } \psi_1 \in r(u), \text{ wenn immer } u \in [w,v), \text{ da} \\
& & r \text{ ein Run} \\
& \Leftrightarrow & \text{für alle } \beta \in \mathcal{B}(w) \text{ existiert ein } v \in \beta \text{ mit } v \geq w, \text{ so daß} \\
& & \mathcal{M}_v, \mathfrak{f} \models \overline{\psi}_2 \text{ und } \mathcal{M}_u, \mathfrak{f} \models \overline{\psi}_1, \text{ wenn immer } u \in [w,v) \\
& \Leftrightarrow & \text{für alle } \beta \in \mathcal{B}(w) \text{ existiert ein } v \in \beta \text{ mit } v \geq w, \text{ so daß} \\
& & \mathcal{M}, v, \mathfrak{f} \models \psi_2 \text{ und } \mathcal{M}, u, \mathfrak{f} \models \psi_1, \text{ wenn immer } u \in [w,v), \\
& & \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
& \Leftrightarrow & \mathcal{M}, w, \mathfrak{f} \models \psi
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{M}_w, \mathfrak{f} \models P_\psi & \Leftrightarrow & \mathsf{E}\bigcirc\chi \in r(w), \text{ für ein } r \in \mathcal{R} \\
& \Leftrightarrow & \text{es gibt einen direkten Nachfolger } w' \text{ von } w \text{ in } \mathcal{T}, \text{ so daß} \\
& & \chi \in r(w'), \text{ da } r \text{ ein Run} \\
& \Leftrightarrow & \text{es gibt einen direkten Nachfolger } w' \text{ von } w \text{ in } \mathcal{T}, \text{ so daß} \\
& & \mathcal{M}_{w'}, \mathfrak{f} \models \overline{\chi} \\
& \Leftrightarrow & \text{es gibt einen direkten Nachfolger } w' \text{ von } w \text{ in } \mathcal{T}, \text{ so daß} \\
& & \mathcal{M}, w', \mathfrak{f} \models \chi, \text{ nach Induktionsvoraussetzung} \\
& \Leftrightarrow & \mathcal{M}, w, \mathfrak{f} \models \psi.
\end{array}$$

Wegen $\varphi \in r(w)$ für ein $w \in T$ und $r \in \mathcal{R}$, haben wir endlich $\mathcal{M}, w, \mathfrak{f} \models \varphi$. □

3.4 Suitability

In diesem Abschnitt werden wir einige der wichtigsten Eigenschaften von Suitable Pairs zusammentragen. Im weiteren werden wir lediglich von solchen Regeln und Axiomen Gebrauch machen, die sowohl in $\mathcal{QCTL}_1$ als auch in $b\mathcal{QCTL}_1$ auftreten. Alle Lemmata dieses

Abschnitts haben daher Gültigkeit bezüglich beider Logiken. Aus diesem Grunde können wir unsere Betrachtungen auf $\mathcal{QCTL}_1$ einschränken; alle Beweise für $b\mathcal{QCTL}_1$ verlaufen vollkommen analog. *Suitable* bedeutet also Suitable in $\mathcal{QCTL}_1$ und *Konsistenz* bedeutet $\mathcal{QCTL}_1$-konsistent.

Lemma 17. (i) *Sei (t_1, t_2) ein Suitable Pair von Typen für φ. Wenn $\mathsf{A}\bigcirc\psi \in t_1$, dann $\psi \in t_2$. Wenn $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in t_1$, dann entweder $\psi_2 \in t_1$ oder $\psi_1 \in t_1$ und $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in t_2$.*

(ii) *Angenommen (S_1, S_2) ist ein Suitable Pair von State Candidates. Dann*

- *für jedes $t_1 \in S_1$ existiert ein $t_2 \in S_2$, so daß $t_1 \prec t_2$,*
- *für jedes $t_2 \in S_2$ existiert ein $t_1 \in S_1$, so daß $t_1 \prec t_2$.*

(iii) *Wenn $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2$ für ein Paar Pointed State Candidates $\mathcal{P}_1 = (S_1, t_1)$ und $\mathcal{P}_2 = (S_2, t_2)$, dann $S_1 \prec S_2$ und $t_1 \prec t_2$.*

Beweis. (i) Sei (t_1, t_2) ein Suitable Pair und nimm an, daß $\mathsf{A}\bigcirc\psi \in t_1$, jedoch $\psi \notin t_2$, das heißt $\neg\psi \in t_2$. Da $t_1 \wedge \mathsf{E}\bigcirc t_2$ konsistent ist, so ist auch $\mathsf{A}\bigcirc\psi \wedge \mathsf{E}\bigcirc\neg\psi$ konsistent. Folglich ist $\mathsf{A}\bigcirc\psi \wedge \neg\mathsf{A}\bigcirc\psi$ konsistent, was nicht sein kann.

Angenommen $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in t_1$. Mit Blick auf (a7) und unter Beachtung der Konsistenz von t_1 haben wir entweder $\psi_2 \in t_1$ oder aber $\psi_1 \in t_1$ und $\mathsf{A}\bigcirc(\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2) \in t_1$ (beachte auch (3.2)). Wie wir jedoch gerade gesehen haben, ist $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in t_2$, falls $\mathsf{A}\bigcirc(\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2) \in t_1$.

(ii) Angenommen (S_1, S_2) ist ein Suitable Pair und nimm weiterhin an, daß es ein $t_1 \in S_1$ gibt, so daß keines der Paare (t_1, t_2), mit $t_2 \in S_2$, Suitable ist. Es folgt dann, daß

$$\vdash t_1 \rightarrow \bigwedge_{t_2 \in S_2} \neg\mathsf{E}\bigcirc t_2$$

oder äquivalent

$$\vdash t_1 \rightarrow \mathsf{A}\bigcirc \bigwedge_{t_2 \in S_2} \neg t_2$$

und daher

$$\vdash \exists x t_1 \rightarrow \exists x \mathsf{A}\bigcirc \bigwedge_{t_2 \in S_2} \neg t_2.$$

Folglich

$$\vdash \exists x t_1 \rightarrow \neg\mathsf{E}\bigcirc(\forall x \bigvee_{t_2 \in S_2} t_2),$$

nach (a3) und (a5). Also

$$\vdash \alpha_{S_1} \rightarrow \neg\mathsf{E}\bigcirc\alpha_{S_2}$$

im Widerspruch zu $S_1 \prec S_2$. Jetzt nimm an, daß es ein $t_2 \in S_2$ gibt, so daß keines der Paare (t_1, t_2), mit $t_1 \in S_1$, Suitable ist. Dann:

$$\vdash \bigvee_{t_1 \in S_1} t_1 \rightarrow \neg\mathsf{E}\bigcirc t_2.$$

Mit (a3) und (a5) erhalten wir wieder

$$\vdash \forall x \bigvee_{t_1 \in S_1} t_1 \to \neg \mathsf{E}\bigcirc(\exists x t_2),$$

und daher

$$\vdash \alpha_{S_1} \to \neg \mathsf{E}\bigcirc\alpha_{S_2}$$

im Widerspruch zu $S_1 \prec S_2$.

(iii) Sei $\beta_{\mathcal{P}_1} \wedge \mathsf{E}\bigcirc\beta_{\mathcal{P}_2}$ konsistent, wobei $\beta_{\mathcal{P}_i} = \alpha_{S_i} \wedge t_i$, $i \in \{1, 2\}$. Es ist mit Lemma 7(iv) leicht einzusehen, daß

$$\vdash (\beta_{\mathcal{P}_1} \wedge \mathsf{E}\bigcirc\beta_{\mathcal{P}_2}) \to (\alpha_{S_1} \wedge \mathsf{E}\bigcirc\alpha_{S_2}).$$

Also muß $\alpha_{S_1} \wedge \mathsf{E}\bigcirc\alpha_{S_2}$ ebenfalls konsistent sein. Der Beweis für $t_1 \prec t_2$ verläuft ganz analog. □

Lemma 18. (i) *Zu jedem konsistenten State Candidate S_1 für φ existiert ein konsistenter State Candidate S_2 für φ, so daß $S_1 \prec S_2$.*

(ii) *Zu jedem konsistenten Pointed State Candidate (S_1, t_1) für φ und zu jedem S_2 mit $S_1 \prec S_2$, existiert ein $t_2 \in S_2$, so daß $(S_1, t_1) \prec (S_2, t_2)$.*

Beweis. (i) Es bezeichne ζ_φ die Disjunktion von Formeln α_S für alle State Candidates S für φ. Da ζ_φ in allen klassischen erststufigen Modellen wahr ist (Subformeln der Gestalt $\mathsf{A}\bigcirc\psi$, $\mathsf{E}\bigcirc\psi$, $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ oder $\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ werden wie einstellige Prädikate behandelt), gilt $\vdash \zeta_\varphi$ und folglich $\vdash \mathsf{A}\bigcirc\zeta_\varphi$. Nach Lemma 7(ii) erhalten wir $\vdash \mathsf{E}\bigcirc\zeta_\varphi$. Also muß $\alpha_S \wedge \mathsf{E}\bigcirc\zeta_\varphi$ konsistent sein. Daher existiert ein State Candidate S_2, so daß $\alpha_{S_1} \wedge \mathsf{E}\bigcirc\alpha_{S_2}$ konsistent ist (beachte, daß $\mathsf{E}\bigcirc$ über Disjunktionen distributiert).

(ii) Angenommen $S_1 \prec S_2$ für ein S_2. Weiterhin nehmen wir an, daß $(S_1, t_1) \prec (S_2, t_2)$ für kein $t_2 \in S_2$. Damit

$$\vdash \bigwedge_{t_2 \in S_2} ((\alpha_{S_1} \wedge t_1) \to \neg \mathsf{E}\bigcirc(\alpha_{S_2} \wedge t_2))$$

oder äquivalent

$$\vdash (\alpha_{S_1} \wedge t_1) \to \bigwedge_{t_2 \in S_2} \neg \mathsf{E}\bigcirc(\alpha_{S_2} \wedge t_2).$$

Dann

$$\vdash (\alpha_{S_1} \wedge t_1) \to \neg \mathsf{E}\bigcirc(\alpha_{S_2} \wedge \bigvee_{t_2 \in S_2} t_2).$$

Danach erhalten wir

$$\vdash \exists x(\alpha_{S_1} \wedge t_1) \to \neg \mathsf{E}\bigcirc\forall x(\alpha_{S_2} \wedge \bigvee_{t_2 \in S_2} t_2),$$

wegen

$$\vdash \forall x((\alpha_{S_1} \wedge t_1) \rightarrow \neg \mathsf{E}\bigcirc(\alpha_{S_2} \wedge \bigvee_{t_2 \in S_2} t_2)).$$

Also

$$\vdash (\alpha_{S_1} \wedge \exists x t_1) \rightarrow \neg \mathsf{E}\bigcirc(\alpha_{S_2} \wedge \forall x \bigvee_{t_2 \in S_2} t_2).$$

Es folgt schließlich

$$\vdash \alpha_{S_1} \rightarrow \neg \mathsf{E}\bigcirc \alpha_{S_2}.$$

Das aber widerspricht der Wahl von S_2. □

Angenommen $\mathcal{P}_1 = (S_1, t_1)$ ist ein konsistenter Pointed State Candidate für φ und $\mathsf{E}\bigcirc\psi \in t_1$. Weiterhin sei $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2$ für einen konsistenten Pointed State Candidate $\mathcal{P}_2$. Wenn $\psi \in t_2$, dann sagen wir, das Paar $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ *realisiert* $\mathsf{E}\bigcirc\psi$ in t_1.

Lemma 19. *Zu jedem konsistenten Pointed State Candidate $\mathcal{P}_1 = (S_1, t_1)$ und jeder Formel $\mathsf{E}\bigcirc\psi \in t_1$ existiert ein konsistenter Pointed State Candidate $\mathcal{P}_2 = (S_2, t_2)$ für φ und $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ realisiert $\mathsf{E}\bigcirc\psi$ in t_1.*

Beweis. Angenommen es gibt $\mathcal{P}_1 = (S_1, t_1)$ und eine Formel $\mathsf{E}\bigcirc\psi \in t_1$, so daß $\psi \notin t$ für alle $\mathcal{P} = (S, t)$ mit $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}$. Beachte zunächst, daß

$$\vdash \beta_{\mathcal{P}_1} \rightarrow \mathsf{E}\bigcirc\psi. \tag{4}$$

Sei $\mathfrak{P}$ die Menge aller $\mathcal{P}$ mit $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}$. Da $\mathfrak{P}$ nicht leer ist (Lemma 18), können wir setzen

$$\vartheta = \bigvee_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} \beta_{\mathcal{P}}.$$

Nach Annahmen gilt $\vdash \vartheta \rightarrow \neg\psi$, das heißt

$$\vdash \mathsf{A}\bigcirc\vartheta \rightarrow \neg(\mathsf{E}\bigcirc\psi). \tag{5}$$

Auf der anderen Seite

$$\vdash \beta_{\mathcal{P}_1} \rightarrow \mathsf{A}\bigcirc\vartheta. \tag{6}$$

Um dies einzusehen, betrachte die Menge $\mathfrak{R}$ aller Pointed State Candidates $\mathcal{P}$ für φ und bezeichne mit ξ_φ die Disjunktion über alle Formeln $\beta_{\mathcal{P}}$ mit $\mathcal{P} \in \mathfrak{R}$.

Angenommen $\nvdash \beta_{\mathcal{P}_1} \rightarrow \mathsf{A}\bigcirc\vartheta$, das heißt $\beta_{\mathcal{P}_1} \wedge \mathsf{E}\bigcirc(\neg\vartheta)$ ist konsistent. Da $\vdash \mathsf{A}\bigcirc\xi_\varphi$ (vergleiche den Beweis zu Lemma 18(i)), so muß

$$\beta_{\mathcal{P}_1} \wedge (\mathsf{A}\bigcirc\xi_\varphi \wedge \mathsf{E}\bigcirc(\neg\vartheta))$$

ebenfalls konsistent sein. Also ist, nach Lemma 7(iii),

$$\beta_{\mathcal{P}_1} \wedge \mathsf{E}\bigcirc(\xi_\varphi \wedge \neg\vartheta)$$

konsistent. Sei nun $\mathfrak{Q} = \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{P}$. Es ist klar, daß

$$\vdash (\bigvee_{\mathcal{P}\in\mathfrak{R}} \beta_{\mathcal{P}} \wedge \bigwedge_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}} \neg\beta_{\mathcal{P}}) \rightarrow \bigvee_{\mathcal{P}\in\mathfrak{Q}} \beta_{\mathcal{P}}.$$

Daher ist $\beta_{\mathcal{P}_1} \wedge \mathsf{E}\bigcirc(\bigvee_{\mathcal{P}\in\mathfrak{Q}} \beta_{\mathcal{P}})$ konsistent und folglich ist $\beta_{\mathcal{P}_1} \wedge \bigvee_{\mathcal{P}\in\mathfrak{Q}} \mathsf{E}\bigcirc\beta_{\mathcal{P}}$ ebenfalls konsistent. Also ist $\beta_{\mathcal{P}_1} \wedge \mathsf{E}\bigcirc\beta_{\mathcal{P}_2}$ konsistent für ein $\mathcal{P}_2 \in \mathfrak{Q}$. Daher $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2$ und entsprechend $\mathcal{P}_2 \in \mathfrak{P}$, was unserer Annahme widerspricht. Das zeigt aber (6).

Mit (6) und (5) folgt dann schließlich

$$\vdash \beta_{\mathcal{P}_1} \rightarrow \neg(\mathsf{E}\bigcirc\psi).$$

Dies kann jedoch, mit Blick auf (4) und wegen der Konsistenz von $\mathcal{P}_1$, nicht sein. □

Wir sind nun in der Lage zu zeigen, daß jede monodische $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$-Formel φ die konsistent ist mit QCTL_1 ($b\mathsf{QCTL}_1$), erfüllbar ist in einem (allgemeinen) Modell. Wegen Lemma 16 brauchen wir dazu lediglich zu zeigen, daß φ erfüllt wird in einem (allgemeinen) Quasimodell für φ.

3.5 Erfüllbarkeit

In diesem Kapitel soll die Struktur von Quasimodellen eingehender untersucht werden. Quasimodelle sind unendliche Strukturen. Wir werden jedoch sehen, daß es möglich ist, Quasimodelle durch endliche „Fragmente“ zu beschreiben. Zu diesem Zweck benötigen wir noch einige zusätzliche Begriffe, die uns die Arbeit für beide Axiomatisierungen $\mathcal{QCTL}_1$ und $b\mathcal{QCTL}_1$, erleichtern werden. Daran anschließend, im Abschnitt 3.5.1, können wir dann endlich die Vollständigkeit von $\mathcal{QCTL}_1$ nachweisen. Der größte Teil dieses Abschnittes läßt sich dann direkt auch auf den Vollständigkeitsbeweis für $b\mathcal{QCTL}_1$ im Abschnitt 3.5.2 übertragen.

Sei $\mathcal{T} = (T, <)$ ein Baum und $w \in T$. Wir sagen, daß w ein *innerer* Punkt von $\mathcal{T}$ ist, wenn es ein $v \in T$ gibt, so daß $w < v$. Sonst sagen wir, daß w ein *äußerer* Punkt von $\mathcal{T}$ ist.

Definition 20 (Schwacher Run). Sei f eine ($b\mathcal{QCTL}_1$-) $\mathcal{QCTL}_1$-State Function für φ über einem Baum $\mathcal{T} = (T, <)$. Eine Funktion r über T mit $r(w) \in S_w$ für jedes $w \in T$ heißt *schwacher Run* in f, wenn

- $r(w) \prec r(w')$ ($r(w) \prec^b r(w')$) für alle benachbarten $w, w' \in T$,
- für alle inneren Punkte w von $\mathcal{T}$ und alle Formeln der Gestalt $\mathsf{E}\bigcirc\psi \in sub_x\varphi$, wenn $\mathsf{E}\bigcirc\psi \in r(w)$, dann existiert ein direkter Nachfolger w' von w in $\mathcal{T}$, so daß $\psi \in r(w')$.

Definition 21 (Schwaches Quasimodell). Eine ($b\mathcal{QCTL}_1$-) $\mathcal{QCTL}_1$-State Function f für φ über einem Baum $\mathcal{T} = (T, <)$ heißt *schwaches Quasimodell* für φ über $\mathcal{T}$, wenn es zu jedem $w \in T$ und jedem $t \in S_w$ einen schwachen Run r in f gibt, der durch t kommt.

Im Gegensatz zu einem gewöhnlichen Run in einem Quasimodell (vergleiche Definition 13 und 14) sichern wir lediglich, daß „Versprechen“ der Gestalt $\mathsf{E}\bigcirc\psi$ erfüllt werden (falls möglich, also für innere Punkte). *Eventualitäten*, also Formeln der Gestalt $\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ oder $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ werden hierbei nicht erfaßt, sondern separat wie folgt berücksichtigen: Sei f eine ($b\mathcal{QCTL}_1$-) $\mathcal{QCTL}_1$-State Function über einem Baum $\mathcal{T} = (T, <)$. Nimm weiterhin an, daß $\varepsilon \in r(w)$ für einen schwachen Run r in f ein $w \in T$ und eine Eventualität ε. Ein Branch β in $\mathcal{T}$ heißt *Satisfying Branch* für w, r und ε, wenn $w \in \beta$ und es existiert ein $v \in \beta$, so daß $v \geq w$, $\psi_2 \in r(v)$ und $\psi_1 \in r(u)$, für alle $u \in [w, v)$.

Definition 22 (Saturierter Schwacher Run). Sei f eine ($b\mathcal{QCTL}_1$-) $\mathcal{QCTL}_1$-State Function über einem Baum $\mathcal{T} = (T, <)$ und $\varepsilon \in sub_x\varphi$ eine Eventualität. Für jedes $w \in T$, ein schwacher Run r in f heißt *$\langle w, \varepsilon\rangle$-saturiert* falls:

- wenn $\varepsilon = \mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in r(w)$, dann existiert ein Satisfying Branch β für w, r und ε in $\mathcal{T}$,
- wenn $\varepsilon = \mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in r(w)$, dann sind alle Branches β in $\mathcal{T}$ die durch w kommen, Satisfying Branches für w, r und ε.

Wir sagen, daß ein schwacher Run r $\langle w, \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n\rangle$-saturiert ist, wenn r $\langle w, \varepsilon_i\rangle$-saturiert ist, für endlich viele Eventualitäten ε_i, $i \leq n$. Ein schwacher Run r heißt *w-saturiert* in f, wenn r $\langle w, \varepsilon\rangle$-saturiert ist, für alle Eventualitäten ε.

Angenommen f ist ein schwaches Quasimodell über einem *endlichen* Baum $\mathcal{T} = (T, <)$ mit Wurzel w_0. Darüber hinaus komme durch jedes $t \in f(w_0)$ ein w_0-saturierter schwacher Run in f. Alle Eventualitäten, die in $f(w_0)$ „gelten“ (das heißt in einem $t \in f(w_0)$ enthalten sind), werden durch einen Wurzel–saturierten schwachen Run „erfüllt“. Eventualitäten, die in irgend einem anderen Punkt $f(w)$ gelten, werden im allgemeinen nicht erfüllt sein. Aber wie wir jetzt sehen werden, ist es eine besondere Eigenschaft eines schwachen Runs in einer endlichen State Function, daß all diese Eventualitäten „übertragen“ werden, zu einem oder zu allen äußeren Punkten von $\mathcal{T}$:

Lemma 23. *Sei f eine ($b\mathcal{QCTL}_1$-) $\mathcal{QCTL}_1$-State Function über einem endlichen Baum $\mathcal{T} = (T, <)$ und $t \in f(w)$ für ein $w \in T$.*

(a) *Angenommen ε ist eine Eventualität der Form $\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in t$ und r ein schwacher Run in f, der im Punkte w durch t kommt. Wenn r nicht $\langle w, \varepsilon\rangle$-saturiert ist, dann existiert ein Branch β in $\mathcal{T}$, so daß $w \in \beta$ und $\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in r(v)$ für den äußeren Punkt $v \in \beta$ sowie $\psi_1 \in r(u)$ für alle $u \in [w, v)$.*

(b) *Angenommen ε ist eine Eventualität der Form $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in t$ und r ein schwacher Run in f, der im Punkte w durch t kommt. Wenn r nicht $\langle w, \varepsilon\rangle$-saturiert ist, dann gilt für jeden Branch β in $\mathcal{T}$, der kein Satisfying Branch für w, r und ε ist, wenn $w \in \beta$, dann $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in r(v)$ für den äußeren Punkt $v \in \beta$ und $\psi_1 \in r(u)$ für alle $u \in [w, v)$.*

Beweis. Für beide Fälle: Ist w kein innerer Punkt von $\mathcal{T}$, nimm den Branch β der w als äußeren Punkt besitzt. Wir können also davon ausgehen, daß w ein innerer Punkt von $\mathcal{T}$ ist.

(a) Angenommen kein Branch in $\mathcal{T}$, der durch w kommt ist ein Satisfying Branch für w, r und ε. Wir haben einen Branch β in $\mathcal{T}$ zu finden, so daß $w \in \beta$ und $\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in r(v)$ für den äußeren Punkt $v \in \beta$ sowie $\psi_1 \in r(u)$ für alle $u \in [w, v)$. Klar, $\psi_1 \in r(w)$ und $\mathsf{E}\bigcirc(\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2) \in r(w)$, wegen $\psi_2 \notin r(w)$ (vergleiche (a6) sowie (3.1)). Da r ein schwacher Run ist in f und w ein innerer Punkt von $\mathcal{T}$, so muß ein direkter Nachfolger w' von w in $\mathcal{T}$ existieren mit $\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in r(w')$. Betrachte nun w' und $r(w') \in S_{w'}$. Wiederhole diesen Vorgang, bis kein Nachfolger mehr existiert. Der Branch β, der durch den zuletzt gefundenen Punkt v kommt, ist der gesuchte.

(b) Sei β ein Branch in $\mathcal{T}$, so daß $w \in \beta$ und β ist kein Satisfying Branch für w, r und ε. Nach (a7) und (3.2) ist $\psi_1 \in r(w)$ und $\mathsf{A}\bigcirc(\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2) \in r(w)$, da $\psi_2 \notin r(w)$. Betrachte nun den direkten Nachfolger w' von w in β. Wegen Lemma 17(i) folgt unmittelbar, daß $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in r(w')$, wegen $r(w) \prec r(w')$. Wenn w' nicht der äußerste Punkt von β ist, wiederhole den letzten Schritt, sonst halte. $\square$

3.5.1 Der ungebündelte Fall

In diesem Abschnitt betrachten wir ausschließlich $\mathcal{QCTL}_1$, das heißt, Konsistenz und Suitability bedeuten immer $\mathcal{QCTL}_1$-Konsistenz und $\mathcal{QCTL}_1$-suitable. Es soll aber darauf hingewiesen sein, daß alles hier gezeigte ebenso für $b\mathcal{QCTL}_1$ gilt (auf diese Weise können wir später viele der Beweise für $b\mathcal{QCTL}_1$ abkürzen) — mit einer Ausnahme: Fall (i) in Lemma 24 unten.

Angenommen S ist ein konsistenter State Candidate und t ein Element von S. Weiterhin nehmen wir an, ε_0 sei eine Eventualität in t. Die Formel ε_0 kann als ein temporales „Versprechen" angesehen werden — wir haben dafür zu sorgen, daß es erfüllt wird. Zu diesem Zweck werden wir zeigen, daß es ein schwaches Quasimodell f_{S,t,ε_0} über einem endlichen Baum $\mathcal{T}$ gibt, mit $f(w_0) = S$ für die Wurzel w_0 von $\mathcal{T}$, das ε_0 in t erfüllt.

Lemma 24. *Zu jedem konsistenten State Candidate S, jedem $t \in S$ und allen Eventualitäten $\varepsilon_0 \in t$ existiert ein schwaches Quasimodell $f = f_{S,t,\varepsilon_0}$ über einem endlichen Baum $\mathcal{T} = (T, <)$ mit Wurzel w_0, so daß:*

- *$f(w_0) = S$,*
- *durch $t \in S_{w_0}$ kommt ein $\langle w_0, \varepsilon_0\rangle$-saturierter schwacher Run r_0 in f.*

Beweis. Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden: (i) ε_0 hat die Gestalt $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ oder (ii) ε_0 hat die Gestalt $\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$.

(i) Sei $\varepsilon_0 = \mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ fixiert. Betrachte die Menge $\mathfrak{P}$ aller konsistenten Pointed State Candidates $\mathcal{P} = (S, t)$, so daß einerseits $\varepsilon_0 \in t$, jedoch andererseits die Behauptung des Lemmas für S, t und ε_0 nicht erfüllt ist. Offensichtlich ist zu zeigen, daß $\mathfrak{P} = \emptyset$. Zu diesem Zweck nehmen wir an, daß $\mathfrak{P} \neq \emptyset$. Setze

$$\vartheta = \bigvee_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} \beta_{\mathcal{P}}.$$

Angenommen wir können

$$\vdash \vartheta \to \neg(\mathsf{A}\psi_1 \mathsf{U} \psi_2) \tag{7}$$

zeigen. Mit (7) folgt dann $\vdash \beta_{\mathcal{P}} \to \neg(\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2)$ für alle $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$. Aber auf der anderen Seite gilt $\vdash \beta_{\mathcal{P}} \to \mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$, ebenso für alle $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$. Da jedes $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ als konsistent vorausgesetzt war, muß unsere Annahme über $\mathfrak{P}$ falsch sein. Also $\mathfrak{P} = \emptyset$, wie gewünscht. Wir werden nun versuchen, (7) zu zeigen.

Betrachte zunächst einen beliebigen konsistenten State Candidate S gemeinsam mit einem $t \in S$ und nimm an, daß sowohl $\varepsilon_0 \in t$ als auch $\psi_2 \in t$. Für den einpunktigen Baum $(\{w_0\}, \emptyset)$ setze $f(w_0) = S$. Trivialerweise kommt durch jedes Element von S ein schwacher Run in f. Da $\psi_2 \in t$, so ist der schwache Run, der durch t kommt, offensichtlich $\langle w_0, \varepsilon_0 \rangle$-saturiert in f. Also $(S, t) \notin \mathfrak{P}$. Folglich ist $\psi_2 \notin t$ für jedes $(S, t) \in \mathfrak{P}$. Das heißt aber, daß $\beta_{\mathcal{P}} \wedge \psi_2$ inkonsistent ist für jedes $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$, weswegen

$$\vdash \vartheta \to \neg\psi_2.$$

Nimm an, daß zusätzlich

$$\vdash \vartheta \to \mathsf{E}\bigcirc\vartheta. \tag{8}$$

Dann, mit Blick auf (r4), erhalten wir (7) und der Beweis ist komplett. Es ist also (8) nachzuweisen. Offensichtlich genügt es, $\vdash \beta_{\mathcal{P}} \to \mathsf{E}\bigcirc\vartheta$ für jedes $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$, zu zeigen. Zu diesem Zweck behaupten wir das Folgende:

Behauptung. Zu jedem $\mathcal{P} = (S, t) \in \mathfrak{P}$ existiert ein $t_0 \in S$ und eine Formel der Gestalt $\mathsf{E}\bigcirc\psi_0 \in t_0$, so daß alle diejenigen $\mathcal{P}' = (S', t')$ Elemente von $\mathfrak{P}$ sind, für die $\mathcal{P} \prec \mathcal{P}'$ und

$$(*) \quad \begin{cases} \text{wenn } t_0 = t, \text{ dann } \psi_0 \in t' \text{ oder} \\ \text{wenn } t_0 \neq t, \text{ dann } \psi_0 \in t'', \text{ für ein } t'' \in S \text{ mit } t_0 \prec t''. \end{cases}$$

Beweis der Behauptung. Fixiere ein $\mathcal{P} = (S, t) \in \mathfrak{P}$. Betrachte für ein $m > 0$, eine Aufzählung $(t, \psi)_{j, j \leq m}$ aller Paare (t, ψ), so daß $t \in S$ und $\mathsf{E}\bigcirc\psi \in t$ für eine Formel $\psi \in sub_x\varphi$ (beachte, daß zu mindestens $\mathsf{E}\bigcirc\top \in t$). O.B.d.A. nehmen wir zusätzlich noch an, daß es zu jedem $j \leq m$ ein $j' \leq m$ gibt, mit

– $j \neq j'$ und

– $(t, \psi)_j = (t, \psi)_{j'}$.

Seien t_j und ψ_j stets derart, daß $(t_j, \psi_j) = (t, \psi)_j$ für jedes $j \leq m$. Wir nehmen nun an, daß unsere Behauptung falsch ist:

(†) Es gibt ein $\mathcal{P}_0 = (S_0, t_0) \in \mathfrak{P}$, so daß zu jedem $j \leq m$ ein konsistenter Pointed State Candidate $\mathcal{P}^j = (S^j, t^j)$ existiert, der *nicht* in $\mathfrak{P}$ ist, und für den zum einen $\mathcal{P}_0 \prec \mathcal{P}^j$ und zum anderen $(*)$ bezüglich t_j und ψ_j gilt.

Unter der Annahme (†) werden wir zeigen, daß $\mathcal{P}_0 \notin \mathfrak{P}$ — ein Widerspruch. Um dies zu sehen, haben wir lediglich ein schwaches Quasimodell f über einem endlichen Baum $\mathcal{T} = (T, <)$ anzugeben, so daß

– $f(w_0) = S_0$ für die Wurzel w_0 von $\mathcal{T}$,

– durch $t_0 \in S_{w_0}$ kommt ein $\langle w_0, \varepsilon_0 \rangle$-saturierter schwacher Run r_0 in f.

Da $\varepsilon_0 \in t_0$ und $\psi_2 \notin t_0$, so folgt nach (a7), daß $\mathsf{A}\bigcirc(\mathsf{A}\psi_1 \mathsf{U} \psi_2) \in t_0$. Mit (†) und Lemma 17(iii) folgt dann weiter, daß $\varepsilon_0 \in t^j$ für jedes $j \leq m$. Also muß für jedes $j \leq m$ ein schwaches Quasimodell f^j über einem endlichen Baum $\mathcal{T}^j = (T^j, <^j)$ mit Wurzel w^j existieren für das

– $f^j(w^j) = S^j$,

– durch $t^j \in S_{w^j}$ kommt ein $\langle w^j, \varepsilon_0 \rangle$-saturierter schwacher Run r^j in f^j.

Wir definieren f. Seien dazu o.B.d.A. alle Mengen T^j, $j \leq m$, disjunkt. Wir setzen

$$T = \{w_0\} \cup \bigcup_{j \leq m} T^j,$$

wobei $w_0 \notin \bigcup_{j \leq m} T^j$. Sei $<$ die kleinste transitive Erweiterung über T aller Relationen $<^j$, so daß $w_0 < w^j$, für alle $j \leq m$. Offensichtlich ist $\mathcal{T}$ ein endlicher Baum und

$$f = \{(w_0, S_0)\} \cup \bigcup_{j \leq m} f^j$$

eine State Function über $\mathcal{T}$.

Wir haben zu überprüfen, daß f ein schwaches Quasimodell über $\mathcal{T}$ ist. In der Tat, durch jedes $t \in f(w)$ für alle $w \in T$ kommt ein schwacher Run r in f; betrachte dazu die beiden folgenden Fälle:

(a) Angenommen $w = w_0$. O.B.d.A. nehmen wir an, daß für ein gewisses $k \leq m$ alle Paare $(t, \psi)_j$, $j \leq k$, genau die sind, in denen t die erste Komponente ist. Aus (†) folgt, daß es zu jeder Formel $\mathsf{E}\bigcirc\psi \in t$ ein $j \leq k$ und ein t' in $f(w^j)$ gibt, so daß $t \prec t'$ und $\psi \in t'$. Falls $k < m$ setzen wir einfach für jedes $j \in (k, m]$, $t' \in f(w^j)$ derart, daß $t \prec t'$. Durch jedes t' in jedem $f(w^j)$ kommt ein schwacher Run r' in f^j. Sei r die Vereinigung aller dieser schwachen Runs r', so daß zusätzlich $r(w_0) = t$. Klar, r ist ein schwacher Run in f, der durch t kommt.

(b) Angenommen $w \neq w_0$, das heißt, $w \in T^j$ für ein $j \leq m$. Sei r' ein schwacher Run in f^j mit $r'(w) = t$. Betrachte $r'(w^j) \in f^j(w^j)$. Gemäß Lemma 17(ii) sei $t' \in f(w_0)$ derart, daß $t' \prec r'(w^j)$. Wie in (a) betrachte $t' \in f(w_0)$, um einen schwachen Run r in ganz f zu finden, der r' solcher Art erweitert, daß $r(w_0) = t'$. Es entsteht jedoch hierbei das folgende Problem: Angenommen es gibt eine Formel $\mathsf{E}\bigcirc\psi' \in t'$. Nach (†) gibt es jedenfalls ein $t'' \in f^j(w^j)$, so daß $\psi' \in t''$, $t' \prec t''$ und $(t', \psi') = (t, \psi)_j$ — aber $\psi' \notin r'(w^j)$.

Unsere Aufzählung $(t, \psi)_{j, j \leq m}$ ist nun aber gerade so beschaffen, daß es zu diesem j ein $j' \neq j$ gibt, mit $(t, \psi)_{j'} = (t', \psi')$. Falls nun $f^j(w^j)$ durch $r'(w^j)$ „belegt“ ist, so wechsle einfach zu $f^{j'}(w^{j'})$ über und betrachte einen schwachen Run r'' in $f^{j'}$ der durch $t'' \in f^{j'}(w^{j'})$ kommt. Endlich erweitere r den schwachen Run r'' auf T^j, das heißt, setze $r(w) = r''(w)$, für jedes $w \geq w^{j'}$.

Es gilt nun zu prüfen, ob durch t_0 ein $\langle w_0, \varepsilon_0\rangle$-saturierter schwacher Run r_0 in f kommt. Dazu bemerken wir zunächst das Folgende. Wie wir schon gesehen haben, muß die Formel $\mathsf{A}\bigcirc(\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2)$ in t_0 sein. Folglich ist nach Lemma 7(ii), $\mathsf{E}\bigcirc(\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2) \in t_0$. Es muß daher mindestens ein $\mathcal{P}^j = (S^j, t^j) \notin \mathfrak{P}$, für ein $j \leq m$, geben, so daß $(*)$ bezüglich t_0 und ε_0 gilt. Setze

$$r_0(w) = \begin{cases} r^j(w), & \text{für alle } w \geq w^j \text{ und } j \leq m \\ t_0, & \text{für } w = w_0. \end{cases}$$

Mit $(\dagger)$ und der Definition von f folgt unmittelbar, daß r_0 ein schwacher Run in f ist. Mehr noch, es ist nun leicht zu sehen, daß r_0 die Formel ε_0 in t_0 saturiert. Wir bemerken lediglich, daß $\varepsilon_0 \in r^j(w^j)$ für jedes $j \leq m$, da $\mathsf{A}\bigcirc\varepsilon_0 \in t_0$ und $t_0 \prec r^j(w^j)$. Also $\mathcal{P}_0 \notin \mathfrak{P}$ — ein Widerspruch. Folglich muß $(\dagger)$ falsch sein und der Beweis der Behauptung ist abgeschlossen. $\diamond$

Fixiere ein $\mathcal{P} = (S, t) \in \mathfrak{P}$. Wie wir jetzt wissen, gibt es ein $t_0 \in S$ und eine Formel der Gestalt $\mathsf{E}\bigcirc\psi_0 \in t_0$, so daß alle $\mathcal{P}' = (S', t')$ in $\mathfrak{P}$ liegen müssen, für die sowohl $\mathcal{P} \prec \mathcal{P}'$ als auch $(*)$ bezüglich t_0 und ψ_0 gilt. Setze $\mathcal{P}_0 = (S, t_0)$.

Gemäß Lemma 19, sei $\zeta = \bigvee \beta_{\mathcal{P}'}$ die (nichtleere) Disjunktion über alle konsistenten Pointed State Candidates $\mathcal{P}' = (S', t')$, mit $\mathcal{P}_0 \prec \mathcal{P}'$ und $\psi_0 \in t'$. Wir zeigen zunächst

$$\vdash \beta_{\mathcal{P}_0} \to \mathsf{E}\bigcirc\zeta. \tag{9}$$

Angenommen (9) gilt nicht, das heißt, $\beta_{\mathcal{P}_0} \wedge \mathsf{A}\bigcirc(\neg\zeta)$ ist konsistent. Es ist klar, daß

$$\vdash \beta_{\mathcal{P}_0} \to \mathsf{A}\bigcirc(\bigvee_{\mathcal{P}_0 \prec \mathcal{P}'} \beta_{\mathcal{P}'}).$$

Da

$$\vdash \beta_{\mathcal{P}_0} \to \mathsf{E}\bigcirc\psi_0,$$

so erhalten wir

$$\vdash \beta_{\mathcal{P}_0} \to \mathsf{E}\bigcirc(\bigvee_{\mathcal{P}_0 \prec \mathcal{P}'} \beta_{\mathcal{P}'} \wedge \psi_0),$$

mit Blick auf Lemma 7(iii). Folglich, wenn $\beta_{\mathcal{P}_0} \wedge \mathsf{A}\bigcirc(\neg\zeta)$ konsistent ist, dann muß

$$\beta_{\mathcal{P}_0} \wedge \mathsf{E}\bigcirc(\neg\zeta \wedge \bigvee_{\mathcal{P}_0 \prec \mathcal{P}'} \beta_{\mathcal{P}'} \wedge \psi_0)$$

ebenfalls konsistent sein. Das aber heißt, daß es ein $\mathcal{P}' = (S', t')$ gibt, mit $\mathcal{P}_0 \prec \mathcal{P}'$, so daß

$$\beta_{\mathcal{P}_0} \wedge \mathsf{E}\bigcirc(\neg\zeta \wedge \beta_{\mathcal{P}'} \wedge \psi_0)$$

konsistent ist. Insbesondere ist $\neg\zeta \wedge \beta_{\mathcal{P}'} \wedge \psi_0$ konsistent, weshalb $\psi_0 \in t'$. Aber dann $\vdash \beta_{\mathcal{P}'} \to \zeta$, im Gegensatz zur Konsistenz von $\neg\zeta \wedge \beta_{\mathcal{P}'}$. Das zeigt (9).

Betrachte das eben fixierte $\mathcal{P} = (S, t) \in \mathfrak{P}$. Um (8) zu zeigen nimm zunächst an, daß $t_0 = t$, mit anderen Worten, $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$. Es folgt sofort mit (9) und der oben gezeigten Behauptung, daß $\vdash \beta_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathsf{E}\bigcirc\vartheta$, da $\vdash \zeta \rightarrow \vartheta$.

Nimm nun an, daß $t_0 \neq t$ und nimm weiterhin an, daß $\nvdash \beta_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathsf{E}\bigcirc\vartheta$, das heißt, $\beta_{\mathcal{P}} \wedge \mathsf{A}\bigcirc(\neg\vartheta)$ ist konsistent.

Beachte zuerst, daß $\vdash \beta_{\mathcal{P}} \rightarrow (\alpha_S \wedge \exists x t_0)$, da $t_0 \in S$. Daher $\vdash \beta_{\mathcal{P}} \rightarrow \exists x(\alpha_S \wedge t_0)$, das heißt, $\vdash \beta_{\mathcal{P}} \rightarrow \exists x \beta_{\mathcal{P}_0}$. Mit (9) folgt, daß $\vdash \beta_{\mathcal{P}} \rightarrow \exists x \mathsf{E}\bigcirc\zeta$ oder äquivalent $\vdash \beta_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathsf{E}\bigcirc\exists x\zeta$.

Sei $\mathfrak{S}$ derart, daß $S' \in \mathfrak{S}$ gdw. es gibt $t' \in S'$, so daß $\psi_0 \in t'$ und $\mathcal{P}_0 \prec \mathcal{P}'$ für $\mathcal{P}' = (S', t')$. Beachte, daß nach Lemma 19, $\mathfrak{S} \neq \emptyset$. Es ist klar, daß

$$\vdash \exists x\zeta \rightarrow \bigvee_{S' \in \mathfrak{S}} \alpha_{S'},$$

Folglich haben wir

$$\vdash \beta_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathsf{E}\bigcirc(\bigvee_{S' \in \mathfrak{S}} \alpha_{S'}). \tag{10}$$

Auf der anderen Seite ist

$$\beta_{\mathcal{P}} \wedge \mathsf{A}\bigcirc(\neg\vartheta \wedge \bigvee_{\mathcal{P} \prec \mathcal{P}'} \beta_{\mathcal{P}'}),$$

konsistent, wegen unserer Annahme und

$$\vdash \beta_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathsf{A}\bigcirc(\bigvee_{\mathcal{P} \prec \mathcal{P}'} \beta_{\mathcal{P}}).$$

Mit anderen Worten

$$\beta_{\mathcal{P}} \wedge \mathsf{A}\bigcirc(\bigvee_{\mathcal{P} \prec \mathcal{P}', \mathcal{P}' \notin \mathfrak{P}} \beta_{\mathcal{P}'})$$

ist konsistent. Dann aber folgt mit (10), daß

$$\beta_{\mathcal{P}} \wedge \mathsf{E}\bigcirc(\bigvee_{\mathcal{P} \prec \mathcal{P}', \mathcal{P}' \notin \mathfrak{P}} \beta_{\mathcal{P}'} \wedge \bigvee_{S'' \in \mathfrak{S}} \alpha_{S''})$$

konsistent ist, und insbesondere auch, daß

$$\beta_{\mathcal{P}} \wedge \mathsf{E}\bigcirc(\beta_{\mathcal{P}'} \wedge \alpha_{S''})$$

konsistent ist, für ein $\mathcal{P}' = (S', t') \notin \mathfrak{P}$ und $S'' \in \mathfrak{S}$. Folglich ist $\beta_{\mathcal{P}'} \wedge \alpha_{S''}$ konsistent, weshalb $S' = S''$. Das aber heißt, daß $\mathcal{P}'$ die Bedingung $(*)$ bezüglich t_0 und ψ_0 erfüllt. Nach unserer Behauptung oben, alle Pointed State Candidates, die diese Eigenschaft erfüllen, liegen in $\mathfrak{P}$ — im Widerspruch zu $\mathcal{P}'$. Damit ist (8) gezeigt.

(ii) Angenommen $\varepsilon_0 = \mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$. Sei $\mathfrak{P}$ die Menge aller konsistenten Pointed State Candidates $\mathcal{P} = (S, t)$, so daß $\varepsilon_0 \in t$ jedoch die Behauptung des Lemmas für S, t und ε_0 nicht erfüllt ist. Wir zeigen, daß dann $\mathfrak{P} = \emptyset$. Zu diesem Zweck nimm an, daß $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$

für einen konsistenten Pointed State Candidate $\mathcal{P}$. Im folgenden werden wir zeigen, daß $\vdash \beta_{\mathcal{P}} \rightarrow \neg\varepsilon_0$, was nicht sein kann. Setze

$$\vartheta = \bigvee_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} \beta_{\mathcal{P}}.$$

Da $\neg\psi_2 \in t$ für alle $\mathcal{P} = (S, t) \in \mathfrak{P}$, so folgt wie für Fall (i) oben zunächst $\vdash \beta_{\mathcal{P}} \rightarrow \neg\psi_2$. Daher

$$\vdash \vartheta \rightarrow \neg\psi_2.$$

Wenn wir zeigen könnten, daß

$$\vdash \vartheta \rightarrow \mathsf{A}\bigcirc(\vartheta \vee \neg(\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2)), \tag{11}$$

so hätten wir $\vdash \vartheta \rightarrow \neg(\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2)$, mit (r3). Da $\vdash \beta_{\mathcal{P}} \rightarrow \vartheta$ für jedes $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$, so folgt mit $\vdash \beta_{\mathcal{P}} \rightarrow \neg(\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2)$ der gewünschte Widerspruch. Also reicht es zu zeigen, daß $\vdash \beta_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathsf{A}\bigcirc(\vartheta \vee \neg(\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2))$, für jedes $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$, womit dann (11) folgt.

Fixiere dazu ein beliebiges $\mathcal{P} = (S, t) \in \mathfrak{P}$ und bezeichne mit ϑ' die Disjunktion über alle konsistenten Pointed State Candidates $\mathcal{P}'$ mit $\mathcal{P} \prec \mathcal{P}'$. Wie oben kann man zeigen, daß

$$\vdash \beta_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathsf{A}\bigcirc\vartheta'.$$

Wir haben lediglich $\vdash \mathsf{A}\bigcirc\vartheta' \rightarrow \mathsf{A}\bigcirc(\vartheta \vee \neg(\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2))$ zu zeigen oder, um es anders zu sagen:

$$\vdash \mathsf{A}\bigcirc\vartheta' \rightarrow \mathsf{A}\bigcirc(\varepsilon_0 \rightarrow \vartheta).$$

Wir werden versuchen $\vdash (\vartheta' \wedge \varepsilon_0) \rightarrow \vartheta$ nachzuweisen, was äquivalent ist zu $\vdash \vartheta' \rightarrow (\varepsilon_0 \rightarrow \vartheta)$. Beachte, daß dann $\vdash \mathsf{A}\bigcirc\vartheta' \rightarrow \mathsf{A}\bigcirc(\varepsilon_0 \rightarrow \vartheta)$, mit Blick auf (r2). Folglich sind wir fertig, wenn wir

$$\vdash (\vartheta' \wedge \varepsilon_0) \rightarrow \vartheta$$

zeigen können. Dazu nimm an, daß es einen konsistenten Pointed State Candidate $\mathcal{P}' = (S', t')$ gibt, mit $\mathcal{P} \prec \mathcal{P}'$ und $\varepsilon_0 \in t'$ — jedoch $\mathcal{P}' \notin \mathfrak{P}$.

Nach Definition von $\mathfrak{P}$ muß es ein schwaches Quasimodell f' über einem endlichen Baum $(T', <')$ geben, das w' als Wurzel hat, so daß

- $f'(w') = S'$
- durch $t' \in S_{w'}$ kommt ein $\langle w', \varepsilon_0\rangle$-saturierter schwacher Run r' in f'.

Wir werden nun zeigen, daß f' zu einem schwachen Quasimodell f über einem endlichen Baum $\mathcal{T} = (T, <)$ in der Weise erweitert werden kann, daß

- $f(w_0) = S$ für die Wurzel w_0 von $\mathcal{T}$,
- durch $t \in S_{w_0}$ kommt ein $\langle w_0, \varepsilon_0\rangle$-saturierter schwacher Run r_0 in f.

Nimm zu diesem Zweck beliebige neue Punkte $w_0, w_1, \ldots, w_n \notin T'$ mit $n = (2^{|sub_x\varphi|} \cdot |sub_x\varphi|)$, und setze $T = T' \cup \{w_0, w_1, \ldots, w_n\}$. Bezeichne mit $<$ den transitiven Abschluß von $<'$ über T, so daß $w_0 < w'$ und $w_0 < w_i$ für alle $i \in [1, n]$.

Sei f nun wie folgt definiert: Für die Wurzel w_0 von $\mathcal{T}$ setze $f(w_0) = S$. Wenn es ein $t' \in S$ und eine Formel der Form $\mathsf{E}\bigcirc\psi' \in t'$ gibt, dann nimm ein beliebig freies w_i und setze $f(w_i) = S_i$, wobei $S \prec S_i$ und $\psi \in t_i$ für ein $t_i \in S_i$ mit $t' \prec t_i$ (siehe Lemma 19). Wenn es dann noch ein $i \in [1, n]$ gibt und f ist noch undefiniert auf w_i, dann setze $f(w_i)$ lediglich so, daß $f(w_0) \prec f(w_i)$ (siehe Lemma 17(ii)). Dieses f erfüllt alle Bedingungen des Lemmas bezüglich S, t und ε_0. Folglich gilt $\mathcal{P} \notin \mathfrak{P}$ — ein Widerspruch. Damit haben wir (11) gezeigt, und das vervollständigt unseren Beweis. $\square$

Gegeben ein konsistenter State Candidate S und ein $t \in S$. Wie das nächste Lemma zeigt, gibt es zu S und t ein endliches schwaches Quasimodell f, das S als Wurzel hat, und welches *alle* Eventualitäten $\varepsilon \in t$ saturiert.

Lemma 25. *Zu jedem konsistenten State Candidate S für φ und jedem $t \in S$ existiert ein schwaches Quasimodell $f = f_{S,t}$ über einem endlichen Baum $\mathcal{T} = (T, <)$ mit Wurzel w_0, so daß*

- *$f(w_0) = S$,*
- *durch $t \in S_{w_0}$ kommt ein w_0-saturierter schwacher Run r in f.*

Beweis. Angenommen $\{\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n\}$, $n \geq 0$, ist die Menge aller Eventualitäten in t. Wir zeigen per Induktion über $i \leq n$, daß es ein schwaches Quasimodell $f_i = f_{S,t,\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_i}$ über einem endlichen Baum $\mathcal{T}_i = (T_i, <_i)$ mit Wurzel w_0 gibt, so daß

- $f_i(w_0) = S$,
- durch $t \in S_{w_0}$ kommt ein $\langle w_0, \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_i\rangle$-saturierter schwacher Run r_i in f_i.

Der Fall $i = 0$ ist gerade in Lemma 24 betrachtet worden. Wir nehmen also an, daß die Behauptung für ein $i \geq 1$ gilt. Wir zeigen, daß die Behauptung dann auch für $i + 1 \leq n$ gelten muß. Zu diesem Zweck betrachte für ein $m \geq 0$, die Menge $\{w_1, \ldots, w_m\}$ aller äußeren Punkte von $\mathcal{T}_i$.

(i) Nimm zunächst an, daß ε_{i+1} die Form $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ hat. Wenn r_i schon $\langle w_0, \varepsilon_{i+1}\rangle$-saturiert ist tue nichts, das heißt, setze $f_{i+1} = f_i$ und $\mathcal{T}_{i+1} = \mathcal{T}_i$. Andernfalls, wenn r_i noch nicht $\langle w_0, \varepsilon_{i+1}\rangle$-saturiert ist, dann muß es einen Branch in $\mathcal{T}_i$ geben, der kein Satisfying Branch für w_0, r_i und ε_{i+1} ist. Aber für alle solche Branches h_j, $j \leq m$, in $\mathcal{T}_i$ gilt: $\varepsilon_{i+1} \in r_i(w_j)$ für den äußeren Punkt $w_j \in h_j$, und $\psi_1 \in r_i(v)$ für alle $v \in [w_0, w_j)$ (Lemma 23(b)).

Sei $\{w_1, \ldots, w_k\}$, $k \leq m$, die Menge aller äußeren Punkte aller Branches h_j, $j \leq k$, in $\mathcal{T}_i$, die keine Satisfying Branches für w_0, r_i und ε_{i+1} in f_i sind. Fixiere ein $j \leq k$ und betrachte $(f_i(w_j), r_i(w_j))$ und $\varepsilon_{i+1} \in r_i(w_j)$. Lemma 24 folgend, gibt es ein schwaches Quasimodell f^j über einem endlichen Baum $\mathcal{T}^j = (T^j, <^j)$ mit Wurzel v_j, so daß:

– $f^j(v_j) = f_i(w_j)$,

– durch $r_i(w_j) \in f^j(v_j)$ kommt ein $\langle v_j, \varepsilon_{i+1}\rangle$-saturierter schwacher Run r^j in f^j.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß alle Mengen T_i und T^j für $j \leq k$ disjunkt sind. Identifiziere nun die Wurzel v_j von $\mathcal{T}^j$ mit $w_j \in T_i$ für alle $j \leq k$ und setze

$$T_{i+1} = T_i \cup \bigcup_{j\leq k} T^j \quad , \quad <_{i+1} = <_i \cup \bigcup_{j\leq k} <^j \quad , \quad f_{i+1} = f_i \cup \bigcup_{j\leq k} f^j.$$

Dann sind f_{i+1} und $\mathcal{T}_{i+1}$ wie gewünscht. Wir zeigen dazu, daß durch jedes $t \in f_{i+1}(w)$ für beliebige $w \in T_{i+1}$ ein schwacher Run r in f_{i+1} kommt:

Angenommen $w \in T_i$. Klar, $f_{i+1}(w) = f_i(w)$. Sei r' ein schwacher Run in f_i, der durch $t \in f_i(w)$ kommt. Für jedes $j \leq k$ betrachte $r'(w_j)$. Da $r'(w_j) \in f_i(w_j) = f^j(v_j)$, so kommt durch $r'(w_j)$ ein schwacher Run r'' in f^j, das heißt, $r'(w_j) = r''(v_j)$ (beachte, daß nach Definition $w_j = v_j$). Es ist damit klar, daß r' erweitert werden kann zu einem schwachen Run r in f_{i+1} mit $r(w) = t$.

Nimm nun an, daß $w \in T^j$ für ein $j \leq k$. Sei r'' ein schwacher Run in f^j, so daß $r''(w) = t$. Betrachte $r''(v_j) \in f^j(v_j) = f_i(w_j)$. Sei r' ein schwacher Run in f_i, der durch $r''(v_j)$ kommt. Indem wir r' auf dieselbe Weise wie oben erweitern, erhalten wir einen schwachen Run r in f_{i+1}, der durch $t \in f_{i+1}(w)$ kommt.

Endlich prüfen wir, ob durch t ein $\langle w_0, \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{i+1}\rangle$-saturierter schwacher Run r_{i+1} in f_{i+1} kommt.Zu diesem Zweck betrachte

$$r_{i+1} = r_i \cup \bigcup_{j\leq k} r^j.$$

Es ist klar, daß r_{i+1} ein schwacher Run in f_{i+1} ist. Darüber hinaus aber ist r_{i+1} ein $\langle w_0, \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_i\rangle$-saturierter schwacher Run in f_{i+1}, der durch t kommt, da r_i ein $\langle w_0, \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_i\rangle$-saturierter schwacher Run in f_i ist, der durch t kommt. Wir haben lediglich zu zeigen, daß r_{i+1} auch ε_{i+1} saturiert. Nimm dazu an, daß es einen Branch h in $\mathcal{T}_{i+1}$ gibt, der kein Satisfying Branch für w_0, r_{i+1} und ε_{i+1} in $\mathcal{T}_{i+1}$ ist. Sei $h' = h \cap T_i$. Klar, h' kann kein Satisfying Branch für w_0, r_i und ε_{i+1} in $\mathcal{T}_i$ sein (andernfalls wäre h ein Satisfying Branch für w_0, r_{i+1} und ε_{i+1} in $\mathcal{T}_{i+1}$). Aber dann ist $\varepsilon_{i+1} \in r_i(w_j)$, wobei $h' = h_j$ für ein $j \leq k$ gemäß Lemma 23(b).

Nach Konstruktion ist $h'' = h \cap T^j$ ein Branch in $\mathcal{T}^j$. Wir erinnern uns, daß r^j ein $\langle v_j, \varepsilon_{i+1}\rangle$-saturierter schwacher Run in f^j war. Also, h'' muß ein Satisfying Branch für v_j, r^j und ε_{i+1} in $\mathcal{T}^j$ sein.

Aber dann muß $h = h' \cup h''$ ein Satisfying Branch für w_0, r_{i+1} und ε_{i+1} in $\mathcal{T}_{i+1}$ sein, da $f_i(w_j) = f^j(v_j)$, $r_i(w_j) = r^j(v_j)$ und $w_j = v_j$. Das widerspricht jedoch der Wahl von h.

(ii) Angenommen nun ε_{i+1} hat die Gestalt $\mathsf{E}\psi_1 \mathsf{U} \psi_2$. Wenn r_i ein $\langle w_0, \varepsilon_{i+1}\rangle$-saturierter schwacher Run ist, setze einfach $f_{i+1} = f_i$ und $\mathcal{T}_{i+1} = \mathcal{T}_i$. Andernfalls, wenn r_i nicht $\langle w_0, \varepsilon_{i+1}\rangle$-saturiert ist, dann sind alle Branches in $\mathcal{T}_i$ keine Satisfying Branches für w_0, r_i und ε_{i+1}. Nach Lemma 23(a) gibt es einen Branch h_j, $j \leq m$, in $\mathcal{T}_i$, so daß: $\varepsilon_{i+1} \in r_i(w_j)$

für den äußeren Punkt $w_j \in h_j$, und $\psi_1 \in r_i(v)$ für alle $v \in [w_0, w_j)$. Das Argument für (ii) ist jetzt genau dasselbe wie für (i). $\square$

Wie wir bald sehen werden, können Quasimodelle auf eine sehr bestimmte Weise in, wie wir es nennen werden, *Blöcke* zerlegt werden. Umgekehrt lassen sich aus Blöcken Quasimodelle aufbauen. Doch zunächst die Definition.

Definition 26 (Block). Sei $\mathcal{T} = (T, <)$ ein endlicher Baum mit Wurzel w_0 und f ein schwaches Quasimodell für φ über $\mathcal{T}$. Wir nennen f einen *Block* für φ über $\mathcal{T}$, wenn durch jedes $t \in S_{w_0}$ ein w_0-saturierter schwacher Run in f kommt.

Mit Blick auf Lemma 25 und Definition 26 werden wir nun das folgende Lemma zeigen können:

Lemma 27. *Zu jedem konsistenten State Candidate S für φ existiert ein Block $f = f_S$ für φ über einem Baum $\mathcal{T}$ mit Wurzel w_0, so daß $f(w_0) = S$.*

Beweis. Betrachte die Menge $\{t_0, \ldots, t_k\} = S$ für ein $k \geq 0$. Der Beweis verläuft per Induktion über $i \leq k$.

Sei $i = 0$. Gemäß Lemma 25 sei $f_0 = f_{S,t_0}$ ein schwaches Quasimodell über einem endlichen Baum $\mathcal{T}_0 = (T_0, <_0)$ mit Wurzel w_0, und r_0 ein w_0-saturierter schwacher Run in f_0, so daß

- $f_0(w_0) = S$,
- $r_0(w_0) = t_0$.

Sei nun $i \geq 0$. Angenommen wir haben bereits ein schwaches Quasimodell $f_i = f_{S,t_0,\ldots,t_i}$ über einem endlichen Baum $\mathcal{T}_i = (T_i, <_i)$ mit Wurzel w_0 definiert, so daß

- $f_i(w_0) = S$,
- $r_j(w_0) = t_j$ für einen w_0-saturierten schwachen Run r_j in f_i, $j \leq i$.

Wir werden sowohl eine endliche State Function f_{i+1}, die f_i erweitert, als auch einen w_0-saturierten schwachen Run r_{i+1} in f_{i+1}, mit $r_{i+1}(w_0) = t_{i+1}$, definieren. Dazu betrachte einen schwachen Run r in f_i, der durch t_{i+1} kommt und nimm an, daß r nicht w_0-saturiert ist (andernfalls setze $f_{i+1} = f_i$ und betrachte t_{i+2}, falls vorhanden). Sei $\{w_1, \ldots, w_m\}$, $m \geq 1$, die Menge aller äußeren Punkte $\mathcal{T}_i$.

Für jedes $w_j \in T_i$, $j \leq m$, betrachte $r(w_j) \in f_i(w_j)$ und setze $S^j = f_i(w_j)$ und $t^j = r(w_j)$. Nach Lemma 25 sei $f^j = f_{S^j,t^j}$ ein schwaches Quasimodell über einem endlichen Baum $\mathcal{T}^j = (T^j, <^j)$ mit Wurzel v_j, so daß

- $f^j(v_j) = f_i(w_j)$,
- $r^j(v_j) = t^j$ für einen v_j-saturierten schwachen Run r^j in f^j.

Für jeden äußeren Punkt w_j, $j \leq m$, in $\mathcal{T}_i$, füge alle Punkte von T^j zu T_i hinzu und erweitere $<_i$ durch alle Relationen $<^j$. Nenne den entstandenen Baum $\mathcal{T}_{i+1} = (T_{i+1}, <_{i+1})$ und bezeichne mit $f_{i+1} = f_{S,t_0,\dots,t_i,t_{i+1}}$ dasjenige schwache Quasimodell über $\mathcal{T}_{i+1}$, das nach dem Zusammenfügen von f_i mit allen f^j durch Identifikation der v^j mit w_j für alle $j \leq m$ entsteht.

Es ist klar, daß $f_{i+1}(w_0) = S$. Darüber hinaus ist der schwache Run

$$r_{i+1} = r \cup \bigcup_{j \leq m} r^j,$$

der durch t_{i+1} kommt (beachte, daß $r(w_0) = t_{i+1}$ in f_i), offensichtlich w_0-saturiert in f_{i+1}.

Auf diese Weise haben wir nach k-vielen Schritten ein endliches schwaches Quasimodell $f = f_{S,t_0,\dots,t_k}$ über einem Baum $\mathcal{T} = (T, <)$ mit Wurzel w_0 definiert, so daß

– $f(w_0) = S$,

– durch jedes $t \in S$ kommt ein w_0-saturierter schwacher Run in f.

□

Wie oben schon bemerkt, werden lediglich diejenigen Eventualitäten erfüllt, die in der Wurzel eines Blocks „gelten“. Lemma 27 gibt uns mit Blick auf Lemma 23 die Möglichkeit, alle Eventualitäten eines Block zu erfüllen. Wir werden dazu versuchen, jeden äußeren State eines Blocks mit der Wurzel eines anderen Blocks zu identifizieren. Dazu die folgende Definition.

Definition 28 (Satisfying Set). Eine Menge Σ heißt *Satisfying Set* für φ, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- es gibt einen Block in Σ, der ein S zur Wurzel hat mit $\varphi \in \bigcup S$,
- zu jedem äußeren S, in jedem Block in Σ, existiert ein Block in Σ, der dieses S zur Wurzel hat.

Lemma 29. *Angenommen es gibt ein Satisfying Set für φ, dann existiert ein Quasimodell f für φ, das φ erfüllt.*

Beweis. Sei Σ ein Satisfying Set für φ. Wir definieren das Quasimodell f über $\mathcal{T} = (T, <)$ als Limes von Blöcken in Σ. Wir starten mit einem Block f_0 über einem Baum $\mathcal{T}_0 = (T_0, <_0)$, der ein S zur Wurzel hat mit $\varphi \in \bigcup S$. Angenommen wir haben für ein $n \geq 0$ einen Block f_n über einem Baum $\mathcal{T}_n = (T_n, <_n)$ definiert, der S zur Wurzel hat. Sei f_{n+1} über $\mathcal{T}_{n+1} = (T_{n+1}, <_{n+1})$ wie folgt: Ist v ein äußerer Punkt von $\mathcal{T}_n$, dann erweitere f_{n+1} f_n an der Stelle v durch einen passenden Block f_v in Σ, das heißt, ist w die Wurzel von f_v, so gilt $f_v(w) = f_n(v)$. Wir setzen dann $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ und $\mathcal{T} = \lim_{n\to\infty} \mathcal{T}_n$.

f ist wohl definiert, da Σ ein Satisfying Set ist. Wir haben zu zeigen, daß durch jedes $t \in f(w)$ für alle $w \in T$ ein Run r in f kommt. Sei dazu $n \geq 0$ minimal mit $w \in T_n$.

Klar, durch $t \in f_n(w)$ kommt ein schwacher Run r_n in f_n. Aber für alle äußeren Punkte v von $\mathcal{T}_n$ gilt, daß alle Eventualitäten in $r_n(v)$ in f_{n+1} erfüllt werden, nämlich durch einen v-saturierten schwachen Run r_{n+1} in f_{n+1}, der r_n erweitert. Es sollte klar sein wie r_{n+1} zu erweitern ist, um schließlich r zu erhalten. □

Mit Lemma 16 und Lemma 29 folgt dann:

Korollar 30. *Sei φ ein monodischer $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$-Satz, der konsistent ist mit $\mathcal{QCTL}_1$. Die Formel φ ist erfüllbar in einem Modell, wenn es ein Satisfying Set für φ gibt.*

Wir haben also nur noch zu zeigen, daß es zu jedem konsistenten $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$-Satz ein Satisfying Set gibt.

Lemma 31. *Sei φ ein monodischer $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$-Satz, der konsistent ist mit $\mathcal{QCTL}_1$. Dann existiert ein Satisfying Set Σ für φ.*

Beweis. Nach Lemma 27 genügt es zu zeigen, daß es einen konsistenten State Candidate S gibt, so daß $\varphi \in \bigcup S$. Sei ξ_φ die Disjunktion über alle Pointed State Candidates. Da einerseits $\vdash \xi_\varphi$ und andererseits φ konsistent ist, so muß die Formel $\varphi \wedge \xi_\varphi$ ebenfalls konsistent sein. Also existiert ein Pointed State Candidate $\mathcal{P} = (S, t)$, so daß $\varphi \wedge \beta_\varphi$ konsistent ist. Das heißt aber insbesondere, daß $\varphi \in t$. □

3.5.2 Der gebündelte Fall

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, daß das Axiomensystem $b\mathcal{QCTL}_1$ vollständig ist bezüglich $b\mathsf{QCTL}_1$. Ab jetzt werden wir sagen, daß eine $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$-Formel φ *konsistent* ist, wenn sie konsistent ist mit $b\mathcal{QCTL}_1$. Darüber hinaus bedeutet *suitable* stets suitable in $b\mathcal{QCTL}_1$.

Sei $\mathcal{T} = (T, <)$ ein endlicher Baum, f ein schwaches Quasimodell über $\mathcal{T}$ und $w \in T$. Wir sagen, daß ein schwacher Run r in f *adäquat für* w ist, wenn für alle Eventualitäten $\varepsilon \in r(w)$ ein Satisfying Branch für w, r und ε in $\mathcal{T}$ existiert. Wenn durch jedes $t \in f(w)$ ein schwacher Run in f kommt, der adäquat ist für w, dann sagen wir, daß f *adäquat für* w ist. Das nächste Lemma ist ein Spezialfall von Lemma 27:

Lemma 32. *Für jeden konsistenten State Candidate S existiert ein endliches schwaches Quasimodell, das S zur Wurzel w_0 hat und das adäquat für w_0 ist.*

Beweis. Wir bemerken, daß mit Blick auf (r4) lediglich der Beweis von Fall (i) in Lemma 24 nicht durchgeht. Also prüfe die Beweise von Lemma 24 Fall (ii), Lemma 25 und von Lemma 27. Die Behauptung folgt dann unmittelbar mit (a8). □

Lemma 33. *Zu jedem konsistenten State Candidate S und zu jedem $t \in S$ gibt es ein schwaches Quasimodell f über einem endlichen Baum $\mathcal{T} = (T, <)$ mit Wurzel w_0, so daß: f ist adäquat für w_0, und es existiert ein Branch β in $\mathcal{T}$, wobei durch t ein schwacher Run r in f kommt, der adäquat für w_0 ist, und β ist ein Satisfying Branch für w_0, r und alle Eventualitäten der Form $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in t$.*

Beweis. Lemma 32 folgend beginnen wir mit einem schwachen Quasimodell f_0 über einem Baum $\mathcal{T}_0 = (T_0, <_0)$, das S zur Wurzel w_0 hat, und das adäquat ist für w_0. Sei r_0 ein schwacher Run in f_0, adäquat für w_0, der durch t kommt.

Sei $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$, $k \geq 0$, eine Aufzählung aller Eventualitäten der Form $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in t$. Fixiere einen Branch β_0 in $\mathcal{T}_0$, der ein Satisfying Branch für w_0, r_0 und ε_0 ist.

Wir nehmen nun an, daß wir für ein gewisses $i < k$ bereits ein schwaches Quasimodell f_i über einem $\mathcal{T}_i = (T_i, <_i)$ definiert haben, das S zur Wurzel w_0 hat und das adäquat ist für w_0. Weiterhin nehmen wir an, daß ein schwacher Run r_i in f_i existiert, der adäquat für w_0 ist und der in w_0 durch t_0 kommt, so daß es einen Branch β_i in $\mathcal{T}_i$ gibt und β_i ist ein Satisfying Branch für w_0, r_i und alle $\varepsilon \in \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i\}$.

Wenn β_i bereits ein Satisfying Branch für w_0, r_i und ε_{i+1} ist, dann tue nichts, das heißt, setze $f_{i+1} = f_i$, $\mathcal{T}_{i+1} = \mathcal{T}_i$ und $r_{i+1} = r_i$. Andernfalls gehe wie folgt vor: Betrachte den äußeren Punkt v_i von β_i in $\mathcal{T}_i$. Nach Lemma 32 existiert ein schwaches Quasimodell f' über einem Baum $\mathcal{T}'$, das $S' = f_i(v_i)$ zur Wurzel w' hat, und das adäquat für w_0 ist. Demnach kommt durch $r_i(v_i) \in S'$ ein schwacher Run r' in f', der adäquat ist für w', also $r'(w') = r_i(v_i)$. Da $\varepsilon_{i+1} \in r_i(v_i)$, so haben wir lediglich noch einen Satisfying Branch β' für w', r' und ε_{i+1} in $\mathcal{T}'$ zu fixieren.

Identifizieren wir v_i mit der Wurzel von $\mathcal{T}'$, so können wir $\mathcal{T}_i$ durch $\mathcal{T}'$ erweitern, um auf diese Weise den Baum $\mathcal{T}_{i+1}$ zu erhalten. Analog erweitern wir f_i durch f', und erhalten f_{i+1}. Sei schließlich r_{i+1} der schwache Run in f_{i+1}, der entsteht, wenn wir r_i durch r' auf ganz $\mathcal{T}_{i+1}$ ausdehnen. Klar, r_{i+1} ist adäquat für w_0. Es ist nun leicht einzusehen, daß der Branch $\beta_{i+1} = \beta_i \cup \beta'$ in $\mathcal{T}_{i+1}$ in der Tat ein Satisfying Branch für w_0, r_{i+1} und alle $\varepsilon \in \{\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}\}$ ist. Setze endlich $f = f_k$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_k$, $r = r_k$ und $\beta = \beta_k$. □

Wir werden nun Definition 26 für unsere Zwecke modifizieren:

Definition 34 (Block). Sei $\mathcal{T} = (T, <)$ ein endlicher Baum mit Wurzel w_0, f ein schwaches Quasimodell für φ über $\mathcal{T}$, R eine Menge schwacher Runs in f und β ein Branch in $\mathcal{T}$. Wir nennen das Tripel der Form (f, R, β) einen *Block* für φ über $\mathcal{T}$, wenn für jedes $t \in S_{w_0}$ genau ein $r \in R$ existiert, der adäquat ist für w_0, mit $r(w_0) = t$, und β ist ein Satisfying Branch für w_0, r und alle Eventualitäten der Gestalt $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in t$.

Lemma 35. *Zu jedem konsistenten State Candidate S existiert ein Block (f, R, β) über einem Baum $\mathcal{T} = (T, <)$ mit Wurzel w_0, so daß $f(w_0) = S$.*

Beweis. Wir starten mit einer Aufzählung $t_0, t_1, \ldots, t_l$ für ein $l \geq 0$ aller $t \in S$. Lemma 33 folgend können wir annehmen, daß wir bereits ein schwaches Quasimodell f_i für ein $i \geq 0$ über einem Baum $\mathcal{T}_i = (T_i, <_i)$ mit Wurzel w_0 definiert haben, das adäquat ist für w_0, gemeinsam mit einem Branch β_i in $\mathcal{T}_i$, so daß durch t_j für alle $j \leq i$ ein schwacher Run r_j in f_i kommt, der adäquat ist für w_0, und β_i ist ein Satisfying Branch für w_0, r_j und alle Eventualitäten der Form $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in t_j$.

Betrachte t_{i+1}. Sei r'' ein schwacher Run in f_i, adäquat für w_0, der in w_0 durch t_{i+1} kommt. Wenn β_i bereits ein Satisfying Branch für w_0, r'' und alle Eventualitäten der Form $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in t_{i+1}$ ist, dann gibt es weiter nichts zu tun. Andernfalls betrachte den äußeren

Punkt v_i von β_i in $\mathcal{T}_i$ und setze $S' = f_i(v_i)$. Abermals nach Lemma 33 sei f' ein schwaches Quasimodell über einem Baum $\mathcal{T}' = (T', <')$ mit Wurzel w', das adäquat für w' ist, mit $f'(w') = S'$, und für das ein Branch β' in $\mathcal{T}'$ existiert, so daß durch $t' = r''(v_i) \in S'$ ein schwacher Run r' in f' kommt, und β' ist ein Satisfying Branch für w', r' und alle Eventualitäten der Form $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in t'$.

Es sollte nun klar sein, auf welche Weise f_i und $\mathcal{T}_i$ zu erweitern sind, um f_{i+1} und $\mathcal{T}_{i+1}$ zu erhalten. Setze $\beta_{i+1} = \beta_i \cup \beta'$. Damit ist $r_{i+1} = r' \cup r''$ ein schwacher Run in f_{i+1}, adäquat für w_0, der in w_0 durch t_{i+1} kommt. Mehr noch, β_{i+1} ist ein Satisfying Branch für w_0, r_{i+1} und alle Eventualitäten der Form $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in t_{i+1}$. Für jedes $j \leq i$ selektiere einen schwachen Run r'_j in f', der in w' durch $r_j(v_i) \in f'(w')$ kommt. Um endlich r_j zu einem schwachen Run in f_{i+1} zu erweitern, betrachte die Vereinigung von r_j und r'_j. Zur Vereinfachung nenne die entstandene Funktion wieder r_j. Setze schließlich $f = f_l$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_l$, $R = \{r_0, \dots, r_l\}$ und $\beta = \beta_l$. □

Sei φ eine monodische $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$-Formel. Analog zu Definition 28:

Definition 36 (Satisfying Set). Eine Menge Σ heißt *Satisfying Set* für φ, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- es gibt einen Block (f, R, β) in Σ mit $\varphi \in \bigcup S$ für die Wurzel S von f,
- zu jedem äußeren S, in jedem Block $(f, R, \beta) \in \Sigma$, existiert ein Block in Σ, der dieses S zur Wurzel hat.

Lemma 37. *Wenn es ein Satisfying Set Σ für φ gibt, dann existiert ein allgemeines Quasimodell f, das φ erfüllt.*

Beweis. Wie im Beweis zu Lemma 29 sei f der Limes schwacher Quasimodelle f_n für jedes $n \geq 0$ wie folgt: Wir starten mit einem Block $\mathfrak{B}_0 = (f_0, R_0, \beta_0) \in \Sigma$ über einem Baum $\mathcal{T}_0 = (T_0, <_0)$, so daß f_0 ein S zur Wurzel w_0 hat, für das $\varphi \in \bigcup S$.

Angenommen wir haben bereits einen Block f_n, $n \geq 0$, über einem Baum $\mathcal{T}_n = (T_n, <_n)$ definiert; dabei habe f_n den State S zur Wurzel. Wir erweitern nun f_n zu f_{n+1} über $\mathcal{T}_{n+1} = (T_{n+1}, <_{n+1})$: Zu jedem äußeren Punkt v von $\mathcal{T}_n$ existiert ein Block $(f', R', \beta') \in \Sigma$, der $S' = f(v)$ zur Wurzel hat. Ist f' eine State Function über einem Baum $\mathcal{T}' = (T', <')$, dann ersetze in $\mathcal{T}_n$ den äußeren Punkt v durch den vollständigen Baum $\mathcal{T}'$ und erweitere f_n auf die neu hinzu gewonnenen Punkte entsprechend f'. Dies mache für jeden äußeren Punkt von $\mathcal{T}_n$. Schließlich setze $f = \bigcup_{n \geq 0} f_n$, $T = \bigcup_{n \geq 0} T_n$ und $<= \bigcup_{n \geq 0} <_n$.

Nenne einen Branch γ in $\mathcal{T}$ *gut*, wenn er unendlich oft durch einen Block aus Σ kommt, das heißt, wenn es zu jedem $w \in \gamma$ ein $v \geq w$ in γ und einen Block (f', R', β') in Σ gibt, so daß $\beta' \subset \gamma$, und f' erweitert f_n für ein $n \geq 0$ an einem äußeren Punkt von $\mathcal{T}_n$.

Sei $\mathcal{B}$ die Menge aller guten Branches in $\mathcal{T} = (T, <)$. Es ist klar, daß (a): zu jedem $w \in T$ existiert ein $\beta \in \mathcal{B}$ mit $w \in \beta$. Wir haben also lediglich zu zeigen, daß (b): durch jedes $t \in f(w)$, für alle $w \in T$, kommt ein Run r in f:

Fixiere ein $w \in T$ und nimm an, daß $n \geq 0$ die kleinste Zahl ist, mit $w \in T_n$. Da f_n ein schwaches Quasimodell ist, finden wir einen schwachen Run r_{n_0} in f_n, mit $r_{n_0}(w) = t$.

Angenommen wir haben für ein $m \geq 0$ einen schwachen Run r_{n_m} in f_{n+m} definiert, so daß $r_{n_m}(w) = t$. Um $r_{n_{m+1}}$ in f_{n+m+1} zu definieren, betrachte $\mathcal{T}_{n+m} = (T_{n+m}, <_{n+m})$. Für jeden äußeren Punkt v von $\mathcal{T}_{n+m}$ sei $(f_v, R_v, \gamma_v) \in \Sigma$ ein Block über einem Baum $\mathcal{T}_v = (T_v, <_v)$, der f_{n+m} in v erweitert. Nach Definition kommt durch $t_v = r_{n_m}(v) \in f_{n+m}(v) = f_v(w')$, wobei $w' \in T_v$ die Wurzel von $\mathcal{T}_v$ ist, ein schwacher Run $r_v \in R_v$, der adäquat ist für w'. Setze

$$r_{n_{m+1}} = r_{n_m} \cup \bigcup_{\substack{v \text{ äußerer Pkt.} \\ \text{von } \mathcal{T}_{n+m}}} r_v.$$

Damit ist $r_{n_{m+1}}$ ein schwacher Run in f_{n+m+1}. Es ist darüber hinaus ebenso klar, daß alle Eventualitäten der Form $\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ in t_v für beliebige äußere Punkte v von $\mathcal{T}_{n+m}$ realisiert sind durch $r_{n_{m+1}}$, das heißt für jede Eventualität ε dieser Form in allen $r_{n_{m+1}}(u)$, $u \leq v$, existiert ein $v' \in T_{n+m+1}$, $v' \geq u$, und ε wird realisiert durch $r_{n_{m+1}}$ bis v'. Setze

$$r = \bigcup_{m \geq 0} r_{n_m}.$$

Betrachte $t \in f(w)$. Angenommen $\varepsilon = \mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 \in t$. In der Tat, r ist ein schwacher Run in f, der in w durch $t \in f(w)$ kommt. Es folgt aber aus (a), daß es ein $\beta \in \mathcal{B}$ gibt, und β ist ein Satisfying Branch für w, r und ε.

Um schließlich zu sehen, daß r ein Run in f ist, nimm an $\varepsilon \in t$ hat die Gestalt $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$. Fixiere einen beliebigen Branch $\beta \in \mathcal{B}$ mit $w \in \beta$. Wir haben zu zeigen, daß β ein Satisfying Branch für w, r und ε ist. Da β gut ist, das heißt, β kommt unendlich oft durch einen Block in f, muß eine Zahl $n \geq 0$ existieren, gemeinsam mit einem $v \geq w$ in β, so daß: v ist ein äußerer Punkt von f_n und $\gamma \subset \beta$, wobei $(f', R', \gamma) \in \Sigma$ ein Block ist, der im n'ten Schritt v ersetzt. Aber dann gilt $r' \subset r$ für ein $r' \in R'$. □

Mit Lemma 35 und Lemma 37 können wir den Beweis von Theorem 6 abschließen:

Lemma 38. *Jede $b\mathcal{QCTL}_1$-konsistente $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$-Formel φ ist erfüllbar in einem bQCTL-Modell.*

Diskussion

Mit Hilfe der Methode der Quasimodelle konnten wir zeigen, daß die von uns vorgeschlagenen Axiomatisierungen $\mathcal{QCTL}_1$ und $b\mathcal{QCTL}_1$ vollständig sind bezüglich der in Abschnitt 3.1 eingeführten monodischen Fragmente von QCTL bzw. bQCTL.

Der Hauptteil des Beweises zur Vollständigkeit von $\mathcal{QCTL}_1$ entfiel dabei auf den Nachweis, daß alle Eventualitäten der Gestalt $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ in dem von uns konstruieren Quasimodell erfüllt werden (Lemma 24(i)). Dies aber war genau die Stelle, an der die Limit Closure Regel zum tragen kam; (r4) gab uns die Kontrolle über alle Branches die entstehen, wenn man einen Baum aus endlichen Fragmenten zusammensetzt. Das aber heißt nichts anderes, als daß uns alle Eigenschaften der Struktur bekannt sind, die sich durch Sätze der Form $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ ausdrücken lassen.

In dem Beweis zur Vollständigkeit von $b\mathcal{QCTL}_1$ konnten wir entsprechend nur den zweiten Teil von Lemma 24 nutzen. Die Idee hinter diesem Beweis war relativ einfach: Nimm genau die Branches in das Bündel auf, die sich bezüglich der Formeln $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ „korrekt“ verhalten. Auf diese Weise ließ sich ein Rückgriff auf (r4) umgehen.

Damit ist schließlich gezeigt, daß die von uns betrachtete Logiken, also QCTL_1 und $b\mathsf{QCTL}_1$, rekursiv aufzählbar sind. Entscheidbar freilich kann keine dieser Logiken sein, da beide den volle Prädikatenkalkül umfassen. Letzteres schließt natürlich keineswegs die Möglichkeit aus, daß nicht doch ausdrucksstarke entscheidbare Fragment dieser Logiken existieren.

4 Entscheidbarkeit nichtlokales CTL^* und PCTL^*

Der Wahrheitswert komplexer Aussagen in CTL^* ist branchabhängig, der Wahrheitswert atomarer Aussagen üblicherweise nicht. Aussagen wie „es regnet“ hängen ausschließlich vom Hier-und-Jetzt ab, nicht aber von zukünftigen Ereignissen. Es genügt daher eine Form der lokalen Semantik: die Wahrheit atomarer Aussagen hängt ausschließlich vom Zeitpunkt ihrer Bewertung und nicht von dem jeweilig intendierten Geschichtsverlauf ab. Wie verhält es sich aber mit (atomaren) Aussagen über zukünftige Ereignisse, wie etwa der aristotelischen „Morgen wird es eine Seeschlacht geben“. Solche Behauptungen sind erfahrungsgemäß kontingenter Natur — die Geschichte könnte schließlich einen anderen als den vermuteten Verlauf nehmen. So muß es nicht mit Notwendigkeit morgen zu einer Seeschlacht kommen, und in Folge dessen findet morgen kein derartiges Ereignis statt. Die Lokalität unserer Semantik gestattet es uns nicht, der Kontingenz dieser Aussage Rechnung zu tragen (vergleiche dazu die interessante Diskussion in [55, pp. 2–3]). Andererseits mag einem die lokale Form der Bewertung atomarer Aussagen ganz natürlich erscheinen, denn die Aussage „Morgen wird es eine Seeschlacht geben“ macht von einem temporalen Operator Gebrauch und kann somit gar nicht atomar sein.

Dieser Ansatz erscheint jedoch künstlich, denn es ist überhaupt nicht ersichtlich, warum und vor allem wie wir die Beschaffenheit atomarer Aussagen einschränken sollten. Eine Behauptung der Art „Ich werde einmal ein großes Werk veröffentlichen“ mag atomar sein, jedoch ist der Wahrheitswert dieser Aussage von Bedingungen in der Zukunft abhängig, von denen ich heute noch gar keine Kenntnis habe kann. Anders ausgedrückt, in lokaler Semantik müßten all diejenigen Verläufe der Geschicht ausgeschlossen werden, die es mir gerade nicht ermöglichen werden, einmal ein großes Werk zu veröffentlichen.

Es ist jedoch nicht üblich einem logischen System vorzuschreiben, welche Art Aussagen als atomar zu behandeln sind und welche nicht. So besäßen atomare Aussagen einen anderen logischen Status als zusammengesetzte Formeln, und eine Beweistheorie etwa müßte dies berücksichtigen (zum Beispiel führte die Substitutionsregel zu keinen korrekten Schlüssen). Um es schließlich noch sinnfälliger zu machen: benutzt man ein solches System, um zum Beispiel praktische Anwendungen zu modellieren, so haben wir zu überlegen, ob die Aussagen die durch solche Variablen benannt werden, tatsächlich zukunftsunabhängig sind (also lokal) oder falls nicht, wie sie dann überhaupt mit lokalen Atomen auszudrücken sind. Der Einwand, solche Aussagen seien also gar nicht atomarer Natur, sondern ausschließlich unter Benutzung temporaler Operatoren zu formulieren, kann somit nicht befriedigen.

Das motiviert die Betrachtung von CTL^* mit *nichtlokaler* Semantik: der Wahrheitswert atomarer Aussagen hängt nun nicht mehr nur von dem Zeitpunkt ihrer Bewertung ab, sondern zusätzlich auch von dessen Zukunft (Philosophen machen im übrigen schon länger von diesem Ansatz Gebrauch [55]). Es sei noch darauf hingewiesen, daß man im Vergleich zur lokalen Semantik, nicht an Ausdrucksstärke verliert, denn es lassen sich ohne große Mühe Formeln bilden die sagen, daß ein bestimmtes Atom zukunftsunabhängig ist.

Wir werden in Abschnitt 5.3 zeigen, daß sich das Erfüllbarkeitsproblem des schwach monodischen Fragments von $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}^*}$, auf die nichtlokale Erfüllbarkeit von $\mathcal{L}_{\mathsf{PCTL}^*}$-Formeln reduzieren läßt. Dieser Abschnitt wird sich daher mit dem Erfüllbarkeitsproblem in nichtlokaler CTL^* bzw. PCTL^*-Semantik befassen. Wegen $\mathsf{CTL}^* = \mathcal{L}_{\mathsf{CTL}^*} \cap \mathsf{PCTL}^*$ kann und wird sich die hier gegebene Argumentation ausschließlich auf PCTL^* beziehen.

Erfüllbarkeit bedeutet innerhalb dieses Abschnitts stets nichtlokale Erfüllbarkeit. Zunächst das folgende Lemma:

Lemma 39. *Wenn eine $\mathcal{L}_{\mathsf{PCTL}^*}$-Formel φ erfüllbar ist in einem (allgemeinen) Modell, dann ist φ erfüllbar in einem (allgemeinen) Modell über einem abzählbaren ω-Baum.*

Beweis. Wir benutzen die Löwenheim–Skolem Methode (vergleiche etwa [9, S. 577] und [55, Proposition 7.1]). Sei $\mathcal{M} = (\mathcal{T}, \cdot)$ ein Modell, das φ erfüllt (wir unterdrücken die Angabe des Domains D, da wir es hier mit einer rein propositionalen Sprache zu tun haben). Dabei sei $\mathcal{T} = (T, <, \mathcal{B})$ ein allgemeiner Baum. Wir können $\mathcal{M}$ als zweisortige erststufige Struktur wie folgt ansehen: Die beiden Sorten Individuen sind T und $\mathcal{B}$. Wir nehmen dann (i) die Ordnung des Baumes $<$, mit Sorte (T, T), (ii) eine binäre Relation $\in$, der Sorte $(T, \mathcal{B})$ (repräsentiert „$w \in \beta$“ für $w \in T$ und $\beta \in \mathcal{B}$) sowie (iii) eine binäre Relation P für jedes Atom p der Sorte $(\mathcal{B}, T)$ („$P(\beta, w)$“ repräsentiert „$\mathcal{M}, \beta, w \models p$“), hinzu.

Eine elementare und abzählbare Substruktur (vergleiche [25, §2.5]) von $\mathcal{M}$ liefert uns ein gebündeltes Modell $\mathcal{M}_0 = (\mathcal{T}_0, \cdot_0)$, dessen unter liegender ω-Baum $\mathcal{T}_0 = (T_0, <_0)$ und dessen Bündel $\mathcal{B}_0$ abzählbar sind. Die Gültigkeit erststufiger Formeln bleibt beim Übergang von $\mathcal{M}$ zu $\mathcal{M}_0$ erhalten. Ist nämlich $\mathfrak{v}(p) = \{(\beta, w) \mid \mathcal{M}, \beta, w \models p\}$, so gilt z.B. $\mathfrak{v}_0(p) = \mathfrak{v}(p) \cap \{(\beta, w) \mid w \in \beta \text{ und } \beta \in \mathcal{B}_0\}$ für jedes Atom p. Es ist nicht schwierig jede $\mathcal{L}_{\mathsf{CTL}^*}$-Formel in die entsprechende zweisortige erststufige Formel zu übersetzen. Dann folgt für jedes $\beta \in \mathcal{B}_0$, $w \in \beta$ und jede $\mathcal{L}_{\mathsf{PCTL}^*}$-Formel ψ, daß

$$\mathcal{M}, \beta, w \models \psi \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{M}_0, \beta, w \models \psi. \tag{12}$$

Also ist φ erfüllbar in $\mathcal{M}_0$. Damit ist der Beweis für den gebündelten Fall abgeschlossen.

Angenommen $\mathcal{B}$ enthält alle Branches in $\mathcal{T}$. Sei $\overline{\mathcal{M}}_0 = \left(\overline{\mathcal{T}}_0, \bar{\cdot}_0\right)$ das Modell, das aus $\mathcal{M}_0$ dadurch hervorgeht, indem $\overline{\mathcal{B}}_0$ die Menge aller Branches in $\mathcal{T}_0$ ist und $\overline{h}_0(p) = \{(w, \beta) \in h(p) | \beta \in \overline{\mathcal{H}}_0\}$, für jedes Atom p. Wir behaupten, daß für jede $\mathcal{L}_{\mathsf{PCTL}^*}$-Formel ψ alle vollen Branches γ in $\mathcal{T}_0$ und alle $w \in \gamma$

$$\mathcal{M}, \gamma, w \models \psi \quad \text{gdw.} \quad \overline{\mathcal{M}_0}, \gamma, w \models \psi.$$

Per Induktion über ψ. Der atomare Fall sowie die Boolschen und temporalen Fälle sind klar. Betrachte den Fall $\mathsf{E}\psi$ und nimm an, die Behauptung sei für ψ bereits gezeigt. Wenn $\mathcal{M}, \gamma, w \models \mathsf{E}\psi$, so fixiere irgend ein $\beta \in \mathcal{B}_0$, mit $w \in \beta$. Klar, daß dann $\mathcal{M}, \beta, w \models \mathsf{E}\psi$. Mit (12) folgt dann $\mathcal{M}, \beta, w \models \mathsf{E}\psi$. Damit muß es ein $\beta' \in \mathcal{B}_0$ geben, mit $w \in \beta'$ und $\mathcal{M}, \beta', w \models \psi$. Abermals mit (12) folgt $\mathcal{M}, \beta', w \models \psi$. Nach Induktionsannahme gilt $\overline{\mathcal{M}_0}, \beta', w \models \psi$ und somit $\overline{\mathcal{M}_0}, \gamma, w \models \mathsf{E}\psi$, wie gewünscht. Die umgekehrte Richtung ist leicht, und sei dem Leser überlassen. Wie oben folgt, daß φ in $\overline{\mathcal{M}_0}$ erfüllt ist. □

Fixiere ein $\mathcal{L}_{\mathsf{PCTL}^*}$-Formel φ. Der Begriff eines *Typs* für φ (Definition 9) überträgt sich unmittelbar auf die folgenden Betrachtungen; lediglich die Bedingungen (3.1) und (3.2) oberhalb der genannten Definition verlieren hier ihre Gültigkeit. Einige andere Definitionen müssen noch ihrer neuen Aufgabe angepaßt werden:

Definition 40 (State Candidate). Eine Menge S von Typen für φ heißt *State Candidate für* φ, wenn sie nichtleer ist und für alle Formeln der Gestalt $\mathsf{E}\psi \in sub\varphi$, die drei Bedingungen $\mathsf{E}\psi \in \bigcap S$, $\mathsf{E}\psi \in \bigcup S$ und $\psi \in \bigcup S$ äquivalent sind.

Sei $\mathcal{T} = (T, <)$ ein ω-Baum. Beachte in der folgenden Definition, daß wir hier mit der irreflexiven Form von *until* arbeiten.

Definition 41 (Run). Sei S_w für jedes $w \in T$ eine nichtleere Menge von Typen für φ und β ein Branch in $\mathcal{T}$. Ein *Run in* β ist eine Abbildung $r : \beta \to \bigcup\limits_{w \in \beta} S_w$, so daß

- $r(w) \in S_w$ für jedes $w \in \beta$,
- für alle $\psi_1 \mathsf{U} \psi_2 \in sub_x\varphi$ und alle $w \in \beta$: $\psi_1 \mathsf{U} \psi_2 \in r(w)$ gdw. es gibt ein $v > w$ mit $v \in \beta$, $\psi_2 \in r(v)$ und $\psi_1 \in r(u)$ für alle u mit $w < u < v$,
- für alle $\psi_1 \mathsf{S} \psi_2 \in sub_x\varphi$ und alle $w \in \beta$: $\psi_1 \mathsf{S} \psi_2 \in r(w)$ gdw. es gibt ein $v < w$ mit $\psi_2 \in r(v)$ und $\psi_1 \in r(u)$ für alle u mit $v < u < w$.

Erneut fassen wir Familien von State Candidates zu Quasimodellen zusammen, auf deren Betrachtung wir uns im weiteren beschränken können (Lemma 43):

Definition 42 (Quasimodell). Eine Familie $(S_w)_{w \in T}$ von State Candidates heißt *Quasimodell für* φ *über* $\mathcal{T}$, wenn

1. $\varphi \in t$ für ein $w \in T$ und $t \in S_w$,
2. für alle $w \in T$ und alle $t \in S_w$ existiert ein Branch β in $\mathcal{T}$ sowie ein Run r in β, so daß $w \in \beta$ und $r(w) = t$,
3. für jeden Branch β in $\mathcal{T}$ existiert ein Run in β.

Wir sagen, daß $(S_w)_{w \in T}$ ein *gebündeltes Quasimodell* für φ über $\mathcal{T}$ ist, wenn lediglich die Bedingungen 1 und 2 erfüllt sind.

Wir werden hier eine besondere Art ω-Bäume nutzen: Für eine nichtleere Menge Λ schreiben wir ${}^{<\omega}\Lambda$ für die Menge aller endlichen $<$-Sequenzen von Elementen aus Λ. Für $\xi, \eta \in {}^{<\omega}\Lambda$ gelte $\xi \prec \eta$, falls η die Verkettung $\xi^\frown\zeta$ für ein nichtleeres $\zeta \in {}^{<\omega}\Lambda$ ist — das heißt, ξ ist ein echtes Anfangsstück von η. Dann ist $({}^{<\omega}\Lambda, \prec)$ ein ω-Baum, der abzählbar ist, wenn Λ abzählbar ist.

Sind $\mathcal{T} = (T, <_T)$ und $\mathcal{U} = (U, <_U)$ ω-Bäume, dann ist das *Produkten* von $\mathcal{T}$ und $\mathcal{U}$ durch

$$\mathcal{T} \otimes \mathcal{U} = (\ \{(w, v) \mid w \in T,\ v \in U,\ hg(w) = hg(v)\},\ <\ )$$

definiert ($hg(w) = |\{v \in T \mid v < w\}|$ ist die jedem Punkt $w \in T$ eindeutig zuordnenbare *Höhe* von w). Dabei gilt $(w, v) < (w', v')$ gdw. $w <_T w'$ und $v <_U v'$. Klar, $\mathcal{T} \otimes \mathcal{U}$ ist ein ω-Baum, und falls $\mathcal{T}$ und $\mathcal{U}$ abzählbar sind, dann ist auch $\mathcal{T} \otimes \mathcal{U}$ abzählbar.

Lemma 43. *Eine $\mathcal{L}_{\mathsf{PCTL}^*}$-Formel φ ist erfüllbar in einem (gebündelten) Modell gdw. es gibt ein (gebündeltes) Quasimodell für φ über einem abzählbaren ω-Baum.*

Beweis. Sei $\mathcal{M} = (\mathcal{T}, \cdot)$, mit $\mathcal{T} = (T, <, \mathcal{B})$, derart, daß $\mathcal{M}, \beta_0, w_0 \models \varphi$ für ein $\beta_0 \in \mathcal{B}$ und ein $w_0 \in \beta_0$. Nach Lemma 39 können wir jedenfalls annehmen, daß $\mathcal{T}$ abzählbar ist. Für jedes $\beta \in \mathcal{B}$ und alle $w \in \beta$ sei

$$\mathrm{tp}(w, \beta) = \{\psi \in sub\varphi \mid \mathcal{M}, \beta, w \models \psi\}.$$

Klar, $\mathrm{tp}(w, \beta)$ ist ein Typ für φ. Für jedes $w \in T$ sei

$$S_w = \{\mathrm{tp}(w, \beta) \mid w \in \beta \text{ und } \beta \in \mathcal{B}\}.$$

Es ist klar, daß S_w für jedes $w \in T$ ein State Candiate ist. Für jedes $\beta \in \mathcal{B}$ ist dann die Abbildung $r_\beta : w \mapsto \mathrm{tp}(w, \beta)$ ein Run in β. Wir behaupten nun, daß $(S_w)_{w \in T}$ ein Quasimodell für φ über $\mathcal{T}$ ist (ein gebündeltes, falls $\mathcal{M}$ gebündelt ist). Da $\mathcal{M}, \beta_0, w_0 \models \varphi$, so folgt $\varphi \in \mathrm{tp}(w_0, \beta_0)$ und $\mathrm{tp}(w_0, \beta_0) \in S_{w_0}$. Für jedes $w \in T$ und alle $t \in S_w$ gilt somit $t = \mathrm{tp}(w, \beta)$, für ein $\beta \in \mathcal{B}$, das w enthält. Damit folgt, daß Bedingung 2 in Definition 42 erfüllt ist und $r_\beta(w) = t$. Schließlich ist r_β für alle $\beta \in \mathcal{B}$ ein Run in β. Falls $\mathcal{M}$ ein ungebündeltes Modell ist, dann ist offensichtlich auch Bedingung 3 noch erfüllt.

Umgekehrt sei $f = (S_w)_{w \in T}$ ein Quasimodell für φ über einem abzählbaren ω-Baum $\mathcal{T}$. Nachdem $\mathcal{T}$ durch $\mathcal{T} \otimes ({}^{<\omega}\Lambda, \prec)$ für eine beliebige Menge Λ mit $2 \leq |\Lambda| \leq \aleph_0$ (vergleiche Abschnitt 2.1 weiter oben) ersetzt wurde, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen:

(∗) Für jedes $w \in T$ und alle $t \in S_w$ existieren unendlich viele Branches β in $\mathcal{T}$ die w enthalten, so daß es einen Run r in β gibt, mit $r(w) = t$.

Jedes S_w ist endlich, so daß es abzählbar viele Paare der Gestalt (w, t) mit $w \in T$ und $t \in S_w$ gibt. Sei (w_n, t_n), $n < \omega$, eine Aufzählung dieser Paare. Mit Hilfe von (∗) wähle rekursiv für jedes $n \geq 0$ einen Branch β_n mit $w_n \in \beta_n$ aus, so daß (i): es existiert ein Run r_{β_n} in β_n mit $r_{\beta_n}(w_n) = t_n$ und (ii): $\beta_n \neq \beta_m$ für alle $m < n$. Wenn f ein gebündeltes Quasimodell ist, dann setze $\mathcal{B} = \{\beta_n | n < \omega\}$. Klar, $\mathcal{B}$ ist ein Bündel in $\mathcal{T}$. Wenn f jedoch ein ungebündeltes Quasimodell ist, dann sei $\mathcal{B}$ die Menge aller Branches in $\mathcal{T}$. Darüber hinaus wähle zu jedem $\beta \in \mathcal{B} \setminus \{\beta_n | n < \omega\}$ einen Run r_β in β aus (dies kann mit Bedingung 3 in Definition 42 geschehen). Damit haben wir einen Run r_β in β für jedes $\beta \in \mathcal{B}$ definiert.

Wir definieren nun das Modell $\mathcal{M} = (\mathcal{T}, \cdot)$. Für alle atomaren Formeln p, jedes $\beta \in \mathcal{B}$ und alle $w \in \beta$ setze

$$\mathcal{M}, \beta, w \models p \quad \text{gdw.} \quad p \in r_\beta(w).$$

BEHAUPTUNG. Für alle $\beta \in \mathcal{B}$, alle $w \in \beta$ und jedes $\psi \in sub_x\varphi$ gilt:

$$\mathcal{M}, \beta, w \models \psi \quad \text{gdw.} \quad \psi \in r_\beta(w).$$

Beweis der Behauptung. Per Induktion über ψ. Für atomares ψ gilt die Behauptung per Definition von $\mathcal{M}$. Die Boolschen Fälle sind ebenso klar. Für $\psi_1 \mathsf{U} \psi_2 \in sub_x\varphi$ haben wir $\mathcal{M}, \beta, w \models \psi_1 \mathsf{U} \psi_2$ gdw. es existiert $v \in \beta$ mit $v > w$, $\mathcal{M}, \beta, v \models \psi_2$ und $\mathcal{M}, \beta, u \models \psi_1$, für alle u, mit $w < u < v$. Induktiv gilt dies gdw. es gibt ein $v \in \beta$, mit $v > w$, $\psi_2 \in r_\beta(v)$ und $\psi_1 \in r_\beta(u)$ für alle u mit $w < u < v$. Da r_β ein Run in β ist, ist letzteres äquivalent zu $\psi_1 \mathsf{U} \psi_2 \in r_\beta(w)$. Entsprechend für $\psi_1 \mathsf{S} \psi_2 \in sub_x\varphi$.

Betrachten wir abschließend noch den Fall $\psi = \mathsf{E}\chi \in sub_x\varphi$. Zunächst haben wir $\mathcal{M}, \beta, w \models \mathsf{E}\chi$ gdw. $\mathcal{M}, \beta', w \models \chi$, für ein $\beta' \in \mathcal{B}$, mit $w \in \beta$. Nach Induktionsannahme ist dies äquivalent zu $\chi \in r_{\beta'}(w)$. Klar, wegen $S_w = \{r_\beta(w) \mid \beta \in \mathcal{B},\ w \in \beta\}$ ist letzteres äquivalent zu $\psi \in \bigcup S_w$. Da S_w ein State Candidate ist, ist dies wiederum äquivalent zu $\mathsf{E}\chi \in r_\beta(w)$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Gemäß Bedingung 1 in Definition 42 gibt es ein $w \in T$, so daß $\varphi \in t$ für ein $t \in S_w$. Wir können nun ein $n \geq 0$ derart wählen, daß $(w, t) = (w_n, t_n)$. Dann ist $w \in \beta_n$, $\beta_n \in \mathcal{B}$ und $r_{\beta_n}(w) = t$. Nach obiger Behauptung folgt damit $\mathcal{M}, \beta_n, w \models \varphi$. Somit ist φ erfüllbar in $\mathcal{M}$, das gebündelt ist, falls f gebündelt ist. □

Lemma 44. *Gegeben eine $\mathcal{L}_{\mathsf{PCTL}^*}$-Formel φ. Es ist entscheidbar, ob φ ein (allgemeines) Quasimodell über einem abzählbaren ω-Baum besitzt.*

Beweis. Ausgehend von φ können wir effektiv die Menge Σ aller State Candidates für φ konstruieren. Ein Quasimodell über einem ω-Baum $\mathcal{T}$ hat dann die Form $(S_w)_{w \in T}$, wobei $S_w \in \Sigma$ für jedes $w \in T$; letzteres werden wir mit Hilfe der einstelligen Relationenvariablen P_S für jedes $S \in \Sigma$ ausdrücken (P_S ist wahr in w gdw. $S_w = S$). Dann können wir die Bedingungen von Definition 42 über P_S wie folgt formalisieren: Seien dazu R_ψ, $\psi \in sub\varphi$, einstellige Relationenvariablen. Für einen Typ t für φ sei dann

$$\chi_t(x) \quad = \quad \bigwedge_{\psi \in t} R_\psi(x) \quad \wedge \quad \bigwedge_{\psi \in sub\varphi \setminus t} \neg R_\psi(x).$$

Die Formel $\chi_t(x)$ sagt, daß die $R_\psi(x)$, $\psi \in t$, den Typ t in x definieren. Für eine einstellige Relationenvariable B sei $\rho(B, \overline{R_\psi})$ die Konjunktion von

- $\bigwedge_{S \in \Sigma} \forall x \big(B(x) \wedge P_S(x) \to \bigvee_{t \in S} \chi_t(x)\big)$,
- $\forall x \big(R_{\psi_1 \mathsf{U} \psi_2}(x) \leftrightarrow \exists y (B(y) \wedge x < y \wedge R_{\psi_2}(y) \wedge \forall z (x < z < y \to R_{\psi_1}(z)))\big)$ für alle $\psi_1 \mathsf{U} \psi_2 \in sub_x\varphi$,
- $\forall x \big(R_{\psi_1 \mathsf{S} \psi_2}(x) \leftrightarrow \exists y (y < x \wedge R_{\psi_2}(y) \wedge \forall z (y < z < x \to R_{\psi_1}(z)))\big)$ für alle $\psi_1 \mathsf{S} \psi_2 \in sub_x\varphi$.

Definiert B einen Branch, dann formalisiert ρ, daß die R_ψ einen Run in B definieren (man beachte dabei, daß B und alle R_ψ frei vorkommen in ρ). Sei $\beta(B)$ die monadische zweitstufige Formel, die ausdrückt, daß B ein Branch ist (also eine maximal linear geordnete

Menge). Damit ist der folgende monadische zweitstufige Satz μ effektiv aus φ konstruierbar:

$$\exists_{S\in\Sigma} P_S \Bigg(\forall x \bigvee_{S\in\Sigma} \Big[P_S(x) \wedge \bigwedge_{\substack{S'\in\Sigma\\ S\neq S'}} \neg P_{S'}(x)\Big] \;\wedge\; \exists x \bigvee_{\substack{S\in\Sigma\\ \varphi\in\bigcup S}} P_S(x) \;\wedge\; \forall B\Big[\beta(B) \rightarrow$$

$$\exists_{\psi\in sub\varphi} R_\psi\ \rho(B,\overline{R_\psi})\Big] \;\wedge\; \forall x \bigwedge_{\substack{S\in\Sigma\\ t\in S}} \Big[P_S(x) \rightarrow \exists B\Big(\beta(B) \wedge B(x) \wedge \exists_{\psi\in sub\varphi} R_\psi(\rho(B,\overline{R_\psi}) \wedge \chi_t(x))\Big)\Big]\Bigg)$$

(für allgemeine Quasimodelle ist die Teilformel $\forall B[\beta(B) \rightarrow \exists_{\psi\in sub\varphi} R_\psi\ \rho]$ zu unterdrücken). Es ist jetzt klar, daß für jeden ω-Baum $\mathcal{T}$, $\mathcal{T} \models \mu$ gdw. es existiert ein (allgemeines) Quasimodell für φ über $\mathcal{T}$. Aus der Entscheidbarkeit von S2S [45] folgt, daß es entscheidbar ist, ob ein gegebener monadischer zweitstufiger Satz wahr ist in einem ω-Baum. Damit ist der Beweis des Lemmas abgeschlossen. $\square$

Als Folgerung aus Lemma 43 und 44 haben wir den

Satz 45. *Es ist entscheidbar, ob eine $\mathcal{L}_{\mathsf{PCTL}^*}$-Formel erfüllbar ist in (allgemeiner) nichtlokaler Semantik.*

Entsprechend den Bemerkungen zu Beginn dieses Abschnitts erhalten wir schließlich noch das folgende Korollar:

Korollar 46. *Es ist entscheidbar, ob eine $\mathcal{L}_{\mathsf{CTL}^*}$-Formel erfüllbar ist in (allgemeiner) nichtlokaler Semantik.*

5 Entscheidbarkeit QCTL_1 und QPCTL^*

Wir wollen uns mit diesem Abschnitt wieder der Prädikatenlogik zuwenden. Aus den vorangegangenen Abschnitten wissen wir, daß QCTL_1 und $b\mathsf{QCTL}_1$ axiomatisierbar sind, als Erweiterungen der klassischen Prädikatenlogik jedoch nicht entscheidbar. So wie wir durch Einschränkung temporaler Operationen auf Formeln mit nur höchstens einer freien Variablen zu rekursiv aufzählbaren Fragmenten von QCTL und $b\mathsf{QCTL}$ gelangt sind, so werden wir nun zeigen können, daß sich mit Hilfe syntaktischer Restriktionen an den prädikatenlogischen Teil der Sprache, sogar entscheidbare Fragmente dieser Logiken finden lassen. Daran anschließend werden wir in diesem Teil der Arbeit eine weitere Logiken studieren, das so genannte schwach monodische Fragment von QPCTL^*. Wir beginnen unserer Untersuchungen zur Entscheidbarkeit mit QCTL_1.

5.1 Entscheidbare Fragmente von QCTL_1

In diesem und den folgenden Abschnitten betrachten wir exemplarisch QCTL_1. Alles was hier gezeigt wird, kann vollkommen analog für $b\mathsf{QCTL}_1$ nachvollzogen werden.

Wie in [31] gezeigt wird, ist das Einsvariablenfragment von QCTL_1 entscheidbar. Allerdings nutzt der Beweis in essentieller Weise die Einbettbarkeit dieses Fragmentes in monadisch monodische zweitstufige Logik und liefert damit einen nichtelementaren Entscheidungsalgorithmus. Im Gegensatz dazu schlagen wir hier einen *elementaren* Algorithmus vor. Darüber hinaus werden wir zeigen, daß durch Einschränkung des prädikatenlogischen Teils von QCTL_1 auf ein entscheidbares erststufiges Fragment der klassischen Prädikatenlogik zahlreiche entscheidbare Fragmente von QCTL_1 definiert werden können.

Generell sei φ eine $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$-Formel. Angenommen φ ist erfüllbar. Nachdem was wir bereits wissen, muß jedenfalls ein Satisfying Set für φ existieren, da φ konsistent ist mit $\mathcal{QCTL}_1$ (vergleiche Lemma 31). Auf der anderen Seite, wenn es ein Satisfying Set für φ gibt, dann muß φ erfüllbar sein (Lemma 29 gemeinsam mit Lemma 16). Folglich haben wir für jedes vorgelegte φ zu entscheiden, ob es ein Satisfying Set für φ gibt. Jedoch: Satisfying Sets können unendlich viele Elemente enthalten. Das ist aber nicht das einzige Problem. Im Moment können wir noch nicht einmal entscheiden, ob eine gegebene Funktion eine State Function ist. Denn das hieße, daß wir die Frage „Ist die Menge S ein *$\mathcal{QCTL}_1$-konsistenter* State Candidate?“ entscheiden könnten.

Unser Vorgehen ist daher wie folgt: Nachdem wir den Begriff der State Function in passender Weise modifiziert haben zeigen wir: (i) Man kann effektiv entscheiden, ob eine gegebene endliche Funktion ein Block für φ ist — vorausgesetzt, wir können in allgemeiner Weise die Frage *„Ist $\overline{\alpha}_S$ eine konsistente erststufige Formel?“* beantworten (zu α_S vergleiche die entsprechende Definition auf Seite 19) — und (ii) Es gibt ein Satisfying Set für φ gdw. es gibt ein endliches Satisfying Set für φ, das lediglich Blöcke einer begrenzten Größe $\nabla(\varphi)$ enthält; dabei hängt $\nabla(\varphi)$ nur von φ ab.

Zunächst zur Modifikation des Begriffes einer State Function. Mit Blick auf Behauptung (i) oben sei ab jetzt ein State Candidate S „geeignet“, wenn er im folgenden Sinne *realisierbar* ist:

Definition 47 (Realisierbarer State Candidate). Sei φ eine $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$-Formel und S ein State Candidate für φ. Wir sagen, daß S ein *realisierbarer State Candidate* für φ ist, wenn es eine erststufige $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M} = (D, P_0, P_1, \ldots)$ gibt, mit

$$\mathcal{M} \models \overline{\alpha}_S.$$

Wie bisher ist der Begriff der *Suitability* von zentraler Bedeutung:

Definition 48 (Suitable Pairs). (i) Ein Paar (t_1, t_2) Typen für φ heißt *suitable*, wenn $\psi \in t_2$, falls $\mathsf{A}\bigcirc\psi \in t_1$. In diesem Fall schreiben wir $t_1 \prec t_2$.

(ii) Ein Paar State Candidates (S_1, S_2) heißt *suitable*, wenn für jedes $t_1 \in S_1$ ein $t_2 \in S_2$ existiert, so daß $t_1 \prec t_2$ und umgekehrt, das heißt für jedes $t_2 \in S_2$ existiert ein $t_1 \in S_1$ mit $t_1 \prec t_2$. In diesem Fall schreiben wir $S_1 \prec S_2$.

Definition 49 (State Function). Eine *State Function* für φ über einem Baum $(T, <)$ ist eine Abbildung f, die jedem $w \in T$ einen realisierbaren State Candidate $f(w) = S_w$ für φ zuordnet, so daß $S_w \prec S_{w'}$ für alle benachbarten $w, w' \in T$.

Runs und *Quasimodelle* werden wie oben definiert (siehe Definition 13 und Definition 14). Analog bleiben uns die Begriffe *Block* und *Satisfying Set* erhalten. Die folgende Bemerkung kann leicht überprüft werden (siehe Definition 12):

Bemerkung 50. Jede $\mathcal{QCTL}_1$-State Function ist eine State Function im Sinne dieses Abschnitts, und jeder Run in einer $\mathcal{QCTL}_1$-State Function ist ein Run, ebenso im aktuellen Sinne. Darüber hinaus behält Lemma 16 seine Gültigkeit.

Zur besseren Unterscheidbarkeit nennen wir Satisfying Sets (Definition 28) ab jetzt $\mathcal{QCTL}_1$-Satisfying Sets. Mit Blick auf Lemma 31 können wir dann zeigen:

Lemma 51. *Wenn φ erfüllbar ist, dann existiert ein Satisfying Set für φ.*

Beweis. Klar, φ ist konsistent mit $\mathcal{QCTL}_1$. Nach Lemma 31 muß es ein $\mathcal{QCTL}_1$-Satisfying Set Σ für φ geben. Wegen Bemerkung 50 ist Σ ein Satisfying Set für φ im aktuellen Kontext. □

Auf der anderen Seite nimm an, uns ist ein Satisfying Set für φ gegeben. Wie in Lemma 37 kann man zeigen, daß es dann ein Quasimodell für φ gibt. Wegen Bemerkung 50 muß φ erfüllbar sein. Somit haben wir:

Lemma 52. *Ein monodischer $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$-Satz φ ist erfüllbar gdw. es gibt ein Satisfying Set für φ.* □

Um zu entscheiden, ob $\varphi \in \mathsf{QCTL}_1$ für eine gegebene $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$-Formel φ, genügt es also zu entscheiden, ob es ein Satisfying Set für $\neg\varphi$ gibt. Zu diesem Zweck nennen wir ein Satisfying Set Σ für eine $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$-Formel φ *φ-bounded*, wenn es eine Funktion ∇ gibt, die auf effektive Weise eine natürliche Zahl $\nabla(\varphi)$ derart berechnet, so daß $|f| \leq \nabla(\varphi)$, für alle $f \in \Sigma$. Da es lediglich endlich viele State Candidates gibt — $\delta_\varphi = 2^{2^{|sub_x\varphi|}}$ viele, um genau zu sein — so haben wir damit $|\Sigma| \leq \delta_\varphi^{\nabla(\varphi)}$. Gegeben solch eine Funktion ∇. Es ist klar, daß entschieden werden kann, ob es ein bezüglich ∇ φ-bounded Satisfying Set für φ gibt.

Wir werden jetzt zeigen, daß die Existenz eines Satisfying Sets für φ äquivalent ist zur Existenz eines φ-bounded Satisfying Sets für φ.

Lemma 53. *Sei φ eine $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$-Formel. Es gibt ein Satisfying Set für φ gdw. es gibt ein φ-bounded Satisfying Set für φ.*

Beweis. Die Richtung von Rechts nach Links ist trivial. Wir zeigen die andere Richtung. Zu diesem Zweck nimm an, daß f ein beliebiger Block ist. Wir werden zeigen, daß es einen Block f' gibt, mit: f' hat dieselbe Wurzel wie f, jeder äußere State von f' ist ein äußerer State von f und $|f'| \leq \nabla(\varphi)$. Ist nun Σ ein Satisfying Set für φ, dann ist die Menge Σ' aller solcher Blöcke f' mit $f \in \Sigma$ natürlich selbst ein Satisfying Set für φ. Darüber hinaus ist Σ' φ-bounded.

Gegeben eine endliche State Function f über einem Baum $\mathcal{T} = (T, <)$. Es sei für alle $w \in T$, $succ(w)$ die Menge aller direkten Nachfolger von w in $\mathcal{T}$. Wir bezeichnen mit $hg(\mathcal{T})$ die *Höhe* von $\mathcal{T}$, das ist die Länge des längsten Branches in $\mathcal{T}$. Zusätzlich bezeichne $wd(\mathcal{T}) = max\,\{|succ(w)| \mid w \in T\}$ die *Weite* von $\mathcal{T}$.

Nimm an f ist ein Block über $\mathcal{T}$, so daß $S_0 = f(w_0)$ für die Wurzel w_0 von $\mathcal{T}$. Für jedes $t \in S_0$ fixiere einen w_0-saturierten schwachen Run r_t in f, so daß $r_t(w_0) = t$. Betrachte alle Paare (ε, t) mit $t \in S_0$ und $\varepsilon \in t$ hat entweder die Form $\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ oder $\mathsf{E}\bigcirc\psi$. Sei g eine Funktion, die jedem dieser Paare (ε, t) einen Branch $g(\varepsilon, t) = \beta$ in $\mathcal{T}$ zuordnet, mit β ist ein Satisfying Branch für w_0, r_t und ε (zur Vereinfachung, wenn ε die Form $\mathsf{E}\bigcirc\psi$ hat, dann nennen wir β einen Satisfying Branch für w_0, r_t und ε, wenn β durch einen direkten Nachfolger w von w_0 kommt, mit $\psi \in r_t(w)$).

O.B.d.A. können wir annehmen, daß für zwei verschiedene Paare (ε, t) und (ε', t'), $g(\varepsilon, t) \cap g(\varepsilon', t') = \{w_0\}$. Andernfalls, das heißt, wenn für zwei verschiedene Paare (ε, t) und (ε', t'), $w \in g(\varepsilon, t) \cap g(\varepsilon', t')$ für ein $w > w_0$, dann ergänze $\mathcal{T}$ um den kompletten Teilbaum von $\mathcal{T}$, dessen Wurzel gerade der direkte Nachfolger von w_0 unterhalb von w ist. Nenne den entstandenen Baum wiederum $\mathcal{T}$. Es ist dann klar, wie f auf alle neuen Punkte von T zu erweitern ist, damit die resultierende State Function wiederum ein Block für φ mit derselben Wurzel und denselben äußeren States ist. Sei nun $g(\varepsilon', t')$ der neue Branch, der isomorph zu dem alten ist.

Sei ε eine beliebige Eventualität der Gestalt $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ oder $\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ und nimm an, daß $w \in T$. Wir sagen, ein schwacher Run r *realisiert* $\varepsilon \in r(w_0)$ *bis* w, wenn $\psi_2 \in r(w)$ und $\psi_1, \neg\psi_2 \in r(v)$, für alle $v < w$. Wenn ε die Gestalt $\mathsf{E}\bigcirc\psi$ hat, dann realisiere r $\varepsilon \in r(w_0)$ bis w, wenn w ein direkter Nachfolger von w_0 ist, und $\psi \in r(w)$.

Sei $t \in S_0$, $\varepsilon \in t$ eine Eventualität und β ein Branch in $\mathcal{T}$. Die Funktion h ordne jedem Tripel (ε, t, β) entweder das eindeutig bestimmte $w \in \beta$ zu für das r_t ε bis w realisiert oder, wenn es kein solches $w \in \beta$ gibt (das heißt, wenn ε die Gestalt $\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ oder $\mathsf{E}\bigcirc\psi$ hat und β ist kein Satisfying Branch für w_0, r_t und ε), dann sei $h(\varepsilon, t, \beta) = w_0$.

Wir zeigen zunächst, daß die Höhe eines Blockes f für φ beschränkt werden kann, ohne seine Weite zu vergrößern:

Behauptung. Sei f ein Block über einem Baum $\mathcal{T} = (T, <)$. Es existiert ein Block f' über einem Baum $\mathcal{T}' = (T', <')$ mit derselben Wurzel wie f, und jeder äußere State von f' ist ein äußerer State von f, $wd(\mathcal{T}') \leq wd(\mathcal{T})$ und $hg(\mathcal{T}') \leq \flat(\varphi)$, wobei

$$\flat(\varphi) = k_\varphi \cdot |sub_x\varphi| \cdot (1 + 2^{k_\varphi + k_\varphi \cdot |sub_x\varphi|}) + 2^{1+k_\varphi+k_\varphi \cdot |sub_x\varphi|} + 2,$$

mit $k_\varphi = 2^{|sub_x\varphi|}$.

Beweis der Behauptung. Jeder Branch β in $\mathcal{T}$ kann wie folgt in höchstens

$$|sub_x\varphi| \cdot 2^{|sub_x\varphi|} + 1 \text{ -viele}$$

Intervalle unterteilt werden: Das erste Intervall I_1 hat die Form $[w_0, w_1] \subset \beta$, wobei $w_0 < w_1$ und, entweder w_1 ist minimal in $\mathcal{T}$, mit $w_1 \in im(h) \setminus \{w_0\}$ (beachte, daß w_0 nicht notwendig ein Element von $im(h)$ sein muß) oder wenn $im(h) \cap \beta \subset \{w_0\}$, dann ist w_1 der äußere Punkt von β. Alle anderen Intervalle I_i, $i > 1$, wenn es welche gibt, haben die Form $[w_{i-1}, w_i] \subset \beta$, wobei $w_{i-1} \leq w_i$, $w_{i-1} \in im(h) \cup \{w_1\}$, und, entweder $w_i \in im(h)$, so daß $v \notin im(h)$ für alle $v \in (w_{i-1}, w_i)$, oder wenn $v \notin im(h)$ für alle $v > w_{i-1}$, dann ist w_i der äußere Punkt von β.

Für jedes $i \geq 1$ bezeichnen wir mit I_i^- das Intervall $(w_{i-1}, w_i]$ mit $I_i = [w_{i-1}, w_i]$. Wir zeigen jetzt, daß die Länge jedes dieser Intervalle $I_i^- \subset \beta$ in der Weise reduziert werden kann, daß $|I_i^-| \leq 1 + 2^{2^{|sub_x\varphi|} + |sub_x\varphi| \cdot k_\varphi}$. Damit erhalten wir dann

$$|\beta'| \leq 1 + (|sub_x\varphi| \cdot 2^{|sub_x\varphi|} + 1) \cdot (1 + 2^{2^{|sub_x\varphi|} + |sub_x\varphi| \cdot k_\varphi})$$

für den resultierenden Branch β'. Zu diesem Zweck nimm zunächst an, daß β ein *Satisfying Branch* ist, das heißt, $\beta \in im(g)$. Nimm weiterhin an, daß es ein Intervall $I_i^- = (w_{i-1}, w_i] \subset \beta$, $i \geq 1$, gibt mit $|I_i^-| > 1 + (2^{2^{|sub_x\varphi|}} \cdot 2^{|sub_x\varphi| \cdot k_\varphi})$. Es ist klar, daß es nicht mehr als

$$2^{2^{|sub_x\varphi|}} \cdot \underbrace{2^{|sub_x\varphi|} \cdot \ldots \cdot 2^{|sub_x\varphi|}}_{k_\varphi\text{-mal}} \text{ -viele}$$

verschiedene Tupel der Form $(f(v), r_{t_1}(v), \ldots, r_{t_k}(v))$ geben kann, mit $k \leq k_\varphi$, $v \in \beta$ und $S_0 = \{t_1, \ldots, t_k\}$, so daß $t_i \neq t_j$ für alle $i, j \leq k$ mit $i \neq j$. Damit erhalten wir für zwei verschieden Punkte $v_0, v_1 \in (w_{i-1}, w_i)$, daß $f(v_0) = f(v_1)$, und $r_t(v_0) = r_t(v_1)$ für alle $t \in S_0$.

Schneide das ganze „überflüssige“ Intervall $(v_0, v_1]$ aus $\mathcal{T}$ heraus, das heißt, lege v_0 und v_1 zusammen, „vergiß“ alle Geschichtsverläufe, die durch v_0 aber nicht durch v_1 kommen, und identifiziere die Zukunft von v_0 mit der von v_1. Nenne den entstandenen Branch β', also $\beta' = \beta \setminus (v_0, v_1]$. Um einzusehen, daß die Restriktion f' von f auf $\mathcal{T}' = (T', <')$, der Baum, den wir gerade erhalten haben, nach wie vor ein Block für φ ist, haben wir das folgende zu überprüfen:

(a) f' ist eine State Function über $\mathcal{T}'$: Das aber ist klar, denn $f'(u) \prec f'(u')$, für alle benachbarten $u, u' \in \beta'$, und daher $f'(u) \prec f'(u')$ für alle benachbarten $u, u' \in T'$.

(b) Durch jedes $t \in f'(u)$ für alle $u \in T'$ kommt ein schwacher Run r in f': Fixiere dazu ein $u_0 \in T'$. Klar, $u_0 \in T$. Daher existiert ein schwacher Run r' in f, der durch $t \in f(u_0) = f'(u_0)$ kommt. Betrachte $r'(v_0)$. Da $f(v_0) = f(v_1)$, so existiert ein schwacher Run r'' in f mit $r''(v_1) = r'(v_0)$. Es ist nicht schwer zu sehen, daß für alle $u \in T'$ die Funktion r, definiert durch $r(u) = r''(u)$, wenn $u > v_1$, und $r(u) = r'(u)$ andernfalls ein schwacher Run in f' ist, der durch $t \in f'(u_0)$ kommt.

(c) Durch jedes $t \in f'(w_0)$ kommt ein w_0-saturierter schwacher Run in f': Um das einzusehen, zeigen wir für jedes $t \in f'(w_0)$, daß r'_t, die Einschränkung von r_t auf T', ein w_0-saturierter schwacher Run in f' ist.

Klar, r'_t ist ein schwacher Run in f': Das einzige, was wir zu überprüfen haben ist, wenn es eine Formel der Gestalt $\mathsf{E}\bigcirc\psi$ in $r'_t(u)$ für ein $u \in T'$ gibt, dann ist $\psi \in r'_t(u')$ für einen direkten Nachfolger u' von u in $\mathcal{T}'$. Nimm dazu an, daß $u \in \beta'$ — der einzig interessante Fall. Damit ist $u \in \beta$. Da r_t ein schwacher Run in f ist, gibt es jedenfalls einen direkten Nachfolger u' von u in $\mathcal{T}$, so daß $\psi \in r_t(u)$, das heißt, wenn $u < v_0$ oder $u > v_1$, dann ist nichts zu zeigen. Nimm also an, daß $u = v_0$. Wegen $f(v_0) = f(v_1)$ und $r_t(v_0) = r_t(v_1)$ folgt $\psi \in r_t(u')$ für einen direkten Nachfolger u' von v_1 in $(T, <)$. Aber u' ist ein direkter Nachfolger von v_0 in $\mathcal{T}'$.

Um schließlich einzusehen, daß r'_t tatsächlich w_0-saturiert ist, nimm zunächst an, daß es eine Eventualität der Form $\varepsilon = \mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ in t gibt. Wenn $g(\varepsilon, t) \neq \beta$, dann sind wir fertig. Nimm also an, daß $g(\varepsilon, t) = \beta$, das heißt, β ist ein Satisfying Branch für w_0, r_t und ε. Aber dann folgt die Behauptung unmittelbar, denn $v_0, v_1 \in (w_{i-1}, w_i)$, das heißt, r_t realisiert keine Eventualität zwischen w_{i-1} und w_i. Damit ist β' ein Satisfying Branch für w_0, r'_t und ε.

Nimm an, $\varepsilon \in t$ hat die Gestalt $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$. Wir haben zu zeigen, daß jeder Branch in $\mathcal{T}'$ ein Satisfying Branch für w_0, r'_t und ε ist. Abermals, der einzig interessante Branch ist β. Genau wie oben realisiert r_t keine Eventualität im Intervall (w_{i-1}, w_i). Da $u \in \beta'$ für alle $u \in T$ mit $u \leq w_{i-1}$ oder $u \geq w_i$, muß β' ein Satisfying Branch für w_0, r'_t und ε sein.

Setze diese Prozedur fort, bis

$$|I_i^-| \leq 1 + 2^{2^{|sub_x\varphi|}+|sub_x\varphi|\cdot k_\varphi},$$

für alle Intervalle $I_i \subset \beta$, $i \geq 1$, und alle Branches $\beta \in im(g)$.

Auf diese Weise können wir annehmen, daß die Länge aller Satisfying Branches, das heißt aller Branches in $im(g)$, beschränkt ist durch eine lediglich von φ abhängige natürliche Zahl.

Aber es ist möglich, daß es noch andere Branches in $\mathcal{T}$ gibt, die nach wie vor unbeschränkter Länge sind. Angenommen β' ist einer dieser Branches. Wenn β' keine gemeinsamen Punkte mit einem Satisfying Branch hat (abgesehen natürlich von der Wurzel w_0), dann mache dasselbe mit β' wie mit allen anderen Branches in $im(g)$ zuvor. In der Tat, die entstandene State Function f ist ein Block für φ, der S_0 zur Wurzel hat. Angenommen also es gibt ein $t \in S_0$ gemeinsam mit einer Eventualität $\varepsilon \in t$, so daß β' einen gemeinsamen Punkt mit $\beta = g(\varepsilon, t)$ hat, der verschieden ist von w_0. Beachte, daß wenn r_t die Eventualität

ε bis zu einem $w > w_0$ realisiert, dann ist jeder Branch, der durch w kommt, ein Satisfying Branch für w_0, r_t und ε, das heißt, wenn $w \in \beta \cap \beta'$, dann $h(\varepsilon, t, \beta) = h(\varepsilon, t, \beta') = w$.

Sei nun $w' \in \beta \cap \beta'$ maximal in $\mathcal{T}$ und betrachte alle Intervalle I'_i, $i \geq 1$, die β' unterteilen. Es ist klar, daß es ein eindeutig bestimmtes $i_0 \geq 1$ gibt, mit $w' \in I'^{-}_{i_0} = (w'_{i_0-1}, w'_{i_0}]$. Da alle Punkte unterhalb w' gesichert sind (denn sie liegen in β, und β ist bereits beschränkt), starten wir die obige Prozedur beginnend mit dem Intervall $(w', w'_{i_0}] \subseteq I'^{-}_{i_0}$ (insbesondere wenn $w' = w'_{i_0}$, dann ist die Kardinalität von $(w', w'_{i_0}]$ null und daher minimal). Im „schlimmsten" Fall hat das reduzierte Intervall zwischen w'_{i_0-1} und w'_{i_0} doppelte Länge, das heißt bestenfalls können wir sagen, daß jedes Intervall I' in β' in der Weise gekürzt werden kann, daß $|I'| \leq 1 + 2^{2^{|sub_x\varphi|}+|sub_x\varphi|\cdot k_\varphi}$ — ausgenommen ein Intervall, das dann höchstens die Länge $1 + (2 \cdot 2^{2^{|sub_x\varphi|}+|sub_x\varphi|\cdot k_\varphi})$ besitzt.

Nach endlich vielen Schritten folgt, daß alle Branches in dem resultierenden Baum höchstens die Länge $\flat(\varphi)$ besitzen. $\diamond$

Wir behaupten nun, daß die Weite eines Blocks für φ beschränkt werden kann, ohne jedoch seine Höhe zu vergrößern:

Behauptung. Ist f ein Block über einem Baum $\mathcal{T} = (T, <)$, dann existiert ein Block f' über einem Baum $\mathcal{T}' = (T', <')$, der dieselbe Wurzel hat wie f, so daß jeder äußere State von f' ein äußerer State von f ist sowie $hg(\mathcal{T}') \leq hg(\mathcal{T})$ und

$$wd(\mathcal{T}') \leq \sharp(\varphi) = 1 + |sub_x\varphi| \cdot 2^{|sub_x\varphi|}.$$

Beweis der Behauptung. Für jedes $w \in T$ und jedes $t \in f(w)$ fixiere einen schwachen Run r_t in f mit $r_t(w) = t$; wenn $w = w_0$, dann sei für jedes $t \in S_0$, r_t wie oben. Zusätzlich wählen wir für jedes $t \in f(w)$ und jede Formel der Gestalt $\mathsf{E}\bigcirc\psi \in r_t(w)$ einen direkten Nachfolger w' von w in $\mathcal{T}$ aus (wenn einer existiert), so daß $\psi \in r_t(w')$, und legen ihn in eine zusätzliche Menge $save(w)$. Wenn es einen Satisfying Branch β in $\mathcal{T}$ gibt, der durch w kommt, dann lege auch w' in $save(w)$, wo w' der direkte Nachfolger von w in β ist (beachte, daß nach unseren allgemeinen Annahmen über f und $\mathcal{T}$, falls $w > w_0$, dann kann höchstens ein Satisfying Branch durch w kommen). Auf diesem Wege haben wir für jedes $w \in T$ jedenfalls nicht mehr als $1 + |sub_x\varphi| \cdot 2^{|sub_x\varphi|}$-viele Punkte fixiert. Setze $T_0 = \{w_0\}$ und für jedes $n \geq 0$, $T_{n+1} = \bigcup_{w \in T_n} save(w)$. Endlich sei $T' = \bigcup_{n \geq 0} T_n$.

Es ist klar, daß $\mathcal{T}' = (T', <')$ ein Baum mit Wurzel w_0 ist, dabei sei $<'$ die Restriktion von $<$ auf T'. Darüber hinaus gilt $\beta \subset T'$ für jeden Satisfying Branch β in $\mathcal{T}$. Es ist nun leicht zu zeigen, daß die Einschränkung f' von f auf T' wieder ein Block für φ ist, der die oben gewünschten Eigenschaften besitzt. $\diamond$

Angenommen $f \in \Sigma$ ist ein Block über einem Baum $\mathcal{T}$. Wenn wir beide Behauptungen zusammennehmen, dann können wir o.B.d.A. annehmen, daß $hg(\mathcal{T}) \leq \flat(\varphi)$ und $wd(\mathcal{T}) \leq \sharp(\varphi)$. Damit folgt schließlich $|f| \leq \nabla(\varphi) = \sum_{i=0}^{\flat(\varphi)} \sharp(\varphi)^i$. $\square$

Entsprechend den einleitenden Bemerkungen zu Beginn dieses Abschnitts können wir abschließend den folgenden Satz formulieren:

Satz 54. *Sei $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$ und nimm an, daß es einen Algorithmus gibt, der für jeden $\mathcal{L}$-Satz φ entscheidet, ob ein State Candidate für φ realisierbar ist, dann ist das Erfüllbarkeitsproblem für $\mathcal{L}$-Sätze entscheidbar.*

5.2 Spracherweiterungen

Bis jetzt haben wir uns weder mit Namen für Individuen, also Konstantensymbolen der Gleichheit noch mit Symbolen für Funktionen befaßt. In diesem Abschnitt ist es unsere Absicht zu diskutieren was geschieht, wenn unsere erststufige Sprache $\mathcal{L}$ über die genannten Zeichen verfügt

Zunächst betrachten wir die Sprache $\mathcal{L}$ versehen mit Konstantensymbolen, die *starr* (*rigide*) in temporalen Modellen interpretiert werden. Wir berühren allerdings nur die Dinge, die tatsächlich notwendig sind, um die obigen Beweise zu adaptieren.

5.2.1 Konstanten

Lemma 52 kann ganz analog zu den bisherigen Ausführungen gezeigt werden, nun jedoch bezüglich der um Konstantensymbole erweiterten Sprache $\mathcal{L}$.

Für jedes $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$ bezeichne $con\varphi$ die Menge aller Konstantensymbole, die in φ auftreten. Eine Menge S von Typen für φ, die auf $sub_0\varphi$ übereinstimmen, heißt jetzt *State Candidate* für φ, wenn für jedes $c \in con\varphi$ ein wie wir es nennen *indizierter* Typ $t_c \in S$ existiert. Setze

$$\alpha_S = \bigwedge_{t \in S} \exists x\, t(x) \quad \wedge \quad \forall x \bigvee_{t \in S} t(x) \quad \wedge \quad \bigwedge_{t_c \in S, c \in con\varphi} t_c(c).$$

Wir sagen, daß S $\mathcal{QCTL}_1$*-konsistent* ist, wenn α_S konsistent ist mit $\mathcal{QCTL}_1$. Insbesondere setzen wir:

Definition 55 (Quasimodell). Eine State Function f für φ über einem Baum $(T, <)$ heißt Quasimodell für φ, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- für jedes $c \in con\varphi$ ist die Funktion r_c, definiert durch $r_c(w) = t_c$, $w \in T$, ein Run in f,
- für jedes $w \in T$ und alle $t \in S_w$ existiert ein Run r in f mit $r(w) = t$.

Wie oben läßt sich dann die Entsprechung zu Theorem 6 nachweisen. Mit Blick auf Abschnitt 5.1 bringen wir exemplarisch noch die folgende Definition:

Definition 56 (Realisierbarer State Candidate). Sei φ eine $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$-Formel und S ein State Candidate für φ. Wir sagen, daß S ein *realisierbarer State Candidate* für φ ist, wenn es eine erststufige $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M} = (D, P_0, P_1, \ldots, c_0, c_1, \ldots)$ gibt, mit $\mathcal{M} \models \overline{\alpha}_S$.

5.2.2 Monodizität und Gleichheit

Man kann zeigen, daß *Funktionensymbole* die guten Eigenschaften monodischer Formeln zerstören [52]. So läßt sich überprüfen, daß QCTL_1 und $b\mathsf{QCTL}_1$ unter Hinzunahme von Funktionensymbolen nicht mehr rekursiv aufgezählt werden können.

Sei $\mathsf{QCTL}_1^=$ ($b\mathsf{QCTL}_1^=$) das monodische Fragment von QCTL (bzw. $b\mathsf{QCTL}$) mit *Gleichheit*. Wir zeigen, daß weder $\mathsf{QCTL}_1^=$ noch $b\mathsf{QCTL}_1^=$ rekursiv aufzählbar sind. Die Möglichkeit in dieser Sprache auszudrücken, daß ein einstelliges Prädikat eine endliche Ausdehnung hat, ist der Grund für dieses Verhalten.

Fixiere ein einstelliges Prädikat P und bezeichne mit χ die Konjunktion der folgenden Formeln:

$$\exists x P(x) \land \forall x \forall y (P(x) \land P(y) \to x = y) \tag{13}$$

$$\mathsf{A}\Box^+ \forall x (P(x) \to \mathsf{A}\bigcirc P(x)) \tag{14}$$

$$\mathsf{A}\Box^+ \forall x \forall y (\neg P(x) \land \neg P(y) \land \mathsf{E}\bigcirc(P(x) \land P(y)) \to x = y) \tag{15}$$

$$\mathsf{A}\Diamond^+ \mathsf{A}\Box^+ \forall x (\mathsf{E}\bigcirc P(x) \to P(x)) \tag{16}$$

Wie das nachfolgende Lemma zeigt, ist für ein gegebenes Modell $\mathcal{M} = (\mathcal{T}, D, I)$ über einem Baum $\mathcal{T} = (T, <)$ oder einem allgemeinen Baum $\mathcal{T} = (T, <, \mathcal{B})$, $\mathcal{M}, w, \mathfrak{f} \models \chi$ äquivalent zu den folgenden Bedingungen: $P(a_0)$ ist wahr in w für ein eindeutig bestimmtes $a_0 \in D$; wenn $P(a)$, $a \in D$, wahr ist in einem Moment $v \in T$, dann bleibt $P(a)$ wahr in jedem Moment in der Zukunft von v; in jedem Moment, kann es höchstens ein $a \in D$ geben für das $P(a)$ beginnt wahr zu sein. Und endlich gibt es einen Zeitpunkt ab dem P stabil bleibt.

Lemma 57. *Für jedes Modell $\mathcal{M} = (\mathcal{T}, D, I)$ über einem Baum $\mathcal{T} = (T, <)$ oder einem allgemeinen Baum $\mathcal{T} = (T, <, \mathcal{B})$ und jede Belegung $\mathfrak{f}$ in $\mathcal{M}$ gilt $\mathcal{M}, w_0, \mathfrak{f} \models \chi$, für die Wurzel w_0 von $\mathcal{T}$, gdw. die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $|P^{w_0}| = 1$,

(ii) $\forall v, v' \in T (v' = v + 1 \to (P^v \subseteq P^{v'} \land |P^{v'} \setminus P^v| \leq 1))$,

(iii) $\exists v \in \beta \, \forall v' \in T (v \leq v' \to P^v \supseteq P^{v'})$, *für jeden Branch β in $\mathcal{T}$ (bzw. in $\mathcal{B}$).*

Beweis. Es sollte klar sein, daß (13) und (i) äquivalent sind. Mehr noch, die Konjunktion von (14) und (15) sind äquivalent zu (ii). Um schließlich (iii) einzusehen nimm an, daß $\mathcal{M}, w, \mathfrak{f} \models \mathsf{A}\Diamond^+ \mathsf{A}\Box^+ \forall x (\mathsf{E}\bigcirc P(x) \to P(x))$, das heißt für jeden Branch β in $\mathcal{T}$ (bzw. in $\mathcal{B}$) existiert ein $v \in \beta$ mit $\mathcal{M}, v, \mathfrak{f} \models \mathsf{A}\Box^+ \forall x (\mathsf{E}\bigcirc P(x) \to P(x))$.

Zunächst gilt für jedes $v \in T$, $\mathcal{M}, v, \mathfrak{f} \models \mathsf{A}\Box^+ \forall x (\mathsf{E}\bigcirc P(x) \to P(x))$ gdw. für alle $u \geq v$ und jeden direkten Nachfolger u' von u in $\mathcal{T}$, $P^u \supseteq P^{u'}$. Induktiv läßt sich dann leicht zeigen, daß die letzte Bedingung äquivalent ist zu $P^v \supseteq P^{v'}$ für alle $v' \geq v$.

Auf der anderen Seite, wenn (ii) und (iii) erfüllt sind, dann gilt für jeden Branch β in $\mathcal{T}$ (bzw. in $\mathcal{B}$), daß ein $v \in \beta$ existiert, mit $\mathcal{M}, v, \mathfrak{f} \models \mathsf{A}\Box^+ \forall x (\mathsf{E}\bigcirc P(x) \to P(x))$. Das aber heißt $\mathcal{M}, w, \mathfrak{f} \models \mathsf{A}\Diamond^+ \mathsf{A}\Box^+ \forall x (\mathsf{E}\bigcirc P(x) \to P(x))$. $\Box$

Angenommen uns ist ein beliebiger erststufiger Satz $\psi \in \mathcal{L}$ gegeben, in dem P nicht vorkommt. Sei Q ein einstelliges Prädikat, das in ψ ebenfalls nicht vorkommt. Wir sind nun in der Lage auszudrücken, daß Q endlich ist. Zu diesem Zweck setze

$$\chi' = \chi \wedge \forall x(Q(x) \leftrightarrow \mathsf{A}\Diamond^+ P(x))$$

und nimm an, daß $\mathcal{M}, w, \mathfrak{f} \models \chi'$. Es ist klar, daß Q^w nicht leer ist, da in jedem Branch, der durch w kommt, ein Zeitpunkt existiert, namentlich w selber, in dem $P(a_0)$. Damit gilt $Q^w(a_0)$. Wie wir schon weiter oben gesehen haben existiert in jedem Branch β, der durch w kommt, ein $v \geq w$ ab dem P stabil bleibt und endlich ist. Da der Durchschnitt von beliebig endlich vielen endlichen Mengen gewiß endlich ist, muß schließlich Q^w endlich sein.

Es bezeichne ψ^Q die Relativierung von ψ auf Q (das heißt, $\psi^Q = \psi$, wenn ψ atomar ist, $\cdot^Q$ kommutiert mit den Boolschen Operatoren und $(\forall x\varphi)^Q = \forall x(Q(x) \rightarrow \varphi^Q)$). Intuitiv, wenn ψ^Q erfüllt ist in einer erststufigen Struktur, dann ist ψ erfüllt in einer erststufigen Struktur, die Q als Domain besitzt. Ist $\mathcal{L}^{=}_{\mathsf{QCTL}_1}$ die Sprache $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$ mit Gleichheit, dann sind χ' und alle Formeln ψ^Q in $\mathcal{L}^{=}_{\mathsf{QCTL}_1}$. Genau wie in [52] läßt sich dann zeigen:

Lemma 58. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

- *ψ ist gültig in allen endlichen erststufigen Modellen,*
- *$\chi' \rightarrow \psi^Q \in \mathsf{QCTL}_1^=$ (bzw. $b\mathsf{QCTL}_1^=$).* □

Gemäß Trakhtenbrot's Theorem (siehe etwa [7]) ist die Menge aller klassischen erststufigen Formeln, die gültig sind in allen endlichen Modellen, nicht rekursiv aufzählbar. Als Folgerung aus Lemma 58 haben wir damit:

Satz 59. *Die Logiken $\mathsf{QCTL}_1^=$ und $b\mathsf{QCTL}_1^=$ sind nicht rekursiv aufzählbar und damit nicht axiomatisierbar.* □

5.3 Entscheidbare Fragmente von QPCTL*

Das *monodische Fragment* von QPCTL^* besteht aus allen Formeln, deren Teilformeln der Gestalt $\bigcirc\psi$, $\mathsf{E}\psi$, $\psi_1 \mathsf{U} \psi_2$ und $\psi_1 \mathsf{S} \psi_2$ höchstens eine freie Variable besitzen. Ein Fragment von QPCTL^* heißt *monodisch*, wenn es ein Fragment des monodischen Fragments von QPCTL^* ist. In [31] wird gezeigt, daß sogar das Einsvariablenfragment von QPCTL^* unentscheidbar ist. Da dieses Fragment gewiß monodisch ist, müssen wir, um überhaupt zu entscheidbaren Fragmenten zu gelangen, nach weiteren Einschränkungen Ausschau halten. Eine solche, die durch Beschränkung erststufiger Quantifikation auf State-Formeln (das heißt, wie weiter oben schon erläutert wurde, auf Formeln deren Wahrheitswert branchunabhängig, also lokal ist) zu entscheidbaren Fragmenten führt, wurde in [31] vorgeschlagen.

Unter dieser Einschränkung müßte der Satz „*Es ist möglich, daß jede Bestellung stets am nächsten Tag das Haus verläßt*“ etwas unglücklich wie folgt ausgedrückt werden:

$$\forall x \mathsf{E}\Box(\mathsf{bestellt}(x) \rightarrow \bigcirc\mathsf{geliefert}(x)).$$

Wir definieren:

Definition 60 (Schwach monodisch). Sei $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}_1^w}$ die Menge aller $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}^*}$-Formeln φ, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

- jede Teilformel von φ der Gestalt $\bigcirc\psi$ besitzt höchstens eine freie Variable,
- jede Teilformel von φ der Gestalt $\mathsf{E}\psi$, $\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ und $\psi_1\mathsf{S}\psi_2$ besitzt keine freien Variablen.

Wir nennen die Formeln in $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}_1^w}$ *schwach monodisch* und $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}_1^w}$ das *schwach monodische Fragment* von $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}^*}$. Wir setzen $\mathsf{QCTL}_1^w = \mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}_1^w} \cap \mathsf{QCTL}^*$ und $\mathsf{QPCTL}_1^w = \mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}_1^w} \cap \mathsf{QPCTL}^*$.

Im schwach monodischen Fragment ließe sich der obige Satz schon passender formalisieren:

$$\mathsf{E}\Box\forall x(\mathsf{bestellt}(x) \rightarrow \bigcirc\mathsf{geliefert}(x)).$$

Es ist klar, daß QPCTL_1^w sowohl die Aussagenlogik CTL^* als auch die volle Prädikatenlogik (ohne Temporaloperatoren) erweitert. Letzteres bedeutet insbesondere, daß das volle schwach monodische Fragment von QPCTL^* unentscheidbar sein muß. Das Ziel dieses Abschnittes ist es, zunächst ein Kriterium für die Erfüllbarkeit schwach monodischer Formeln zu erarbeiten (Korollar 69) und, um schließlich zu entscheidbaren Fragmenten von QPCTL_1^w zu gelangen, es nachfolgend anzuwenden.

5.3.1 Gebündelte und volle Erfüllbarkeit

Wir beginnen unsere Untersuchungen mit der Beobachtung, daß sich das Erfüllbarkeitsproblem für den gebündelten Fall auf das des ungebündelten Falles reduzieren läßt. Sei uns hierzu eine beliebige $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}_1^w}$-Formel φ gemeinsam mit einer Aussagenvariablen q, die nicht in φ vorkommt, vorgelegt. Wir bezeichnen mit $\varphi^{\uparrow}$ das Ergebnis der Ersetzung jeder Teilformel von φ der Gestalt $\mathsf{E}\psi$ durch $\mathsf{E}(\psi \wedge \Diamond\Box q)$. Wir bemerken, wenn φ eine $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}_1^w}$-Formel ist, so ist auch $\varphi^{\uparrow}$ eine $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}_1^w}$-Formel.

Lemma 61. *Eine $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}_1^w}$-Formel φ ist erfüllbar in einem allgemeinen Modell gdw. $(\mathsf{E}\varphi)^{\uparrow}$ ist erfüllbar in einem Modell.*

Beweis. Die Implikation ($\Leftarrow$) ist trivial. Wir zeigen ($\Rightarrow$). Mit Hilfe eines Löwenheim–Skolem Argumentes (siehe [9] und Lemma 39 oben) können wir annehmen, daß φ in einem Modell $\mathcal{M}$ mit abzählbarem Bündel $\mathcal{B}$ erfüllt ist. Weiterhin nehmen wir an, daß $\mathcal{B}$ unendlich ist (der endliche Fall bleibt dem Leser überlassen). Sei $\beta_0, \beta_1, \ldots$ eine Aufzählung von $\mathcal{B}$. Wir machen aus $\mathcal{M}$ ein volles Modell $\mathcal{M}^{\dagger}$ über dem gleichen ω-Baum und definieren die Wahrheitsrelation für q wie folgt: Setze $\mathcal{M}^{\dagger}, \beta_0, w \models q$ für alle $w \in \beta_0$. Ist die Wahrheit von q für alle Paare (β_i, w) mit $i \leq n$ und $w \in \beta_i$ bereits definiert, dann betrachte β_{n+1}. Es muß jedenfalls ein $w \in \beta_{n+1}$ geben, so daß der Abstand von w zu jedem β_i, $i < n+1$, (das heißt, die Länge des kürzesten Weges von w zu einem Punkt in β_i) größer oder gleich 2 ist. Dann setze $\mathcal{M}^{\dagger}, \beta_{n+1}, w' \models q$ für alle $w' \geq w$ mit $w' \in \beta_{n+1}$.

Ein Branch β heißt *markiert*, wenn es $w \in \beta$ gibt, so daß $\mathcal{M}^{\dagger}, \beta, w' \models q$, für alle $w' \geq w$ mit $w' \in \beta$. Es ist leicht nachzuvollziehen, daß auf diese Weise gerade die $\beta \in \mathcal{B}$ markiert wurden. Insbesondere gilt, falls w_n für jedes n das kleinste Element von $\beta \setminus \bigcup_{m<n} \beta_m$ ist und wenn $\beta \notin \mathcal{B}$, daß dann $\beta, w_n \not\models q$. Da $\{w_0, w_1, \ldots\}$ unendlich ist folgt, daß β nicht markiert sein kann. Man kann nun per Induktion zeigen, daß für jede Subformel ψ von φ und jedes Paar (β, w), $\mathcal{M}, \beta, w \models \psi$ gdw. $\mathcal{M}^\dagger, \beta, w \models \psi^\uparrow$. Folglich ist $(\mathsf{E}\varphi)^\uparrow$ erfüllbar in $\mathcal{M}^\dagger$. $\square$

Alle nachfolgend von uns betrachteten Fragmente von $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}_1^w}$ sind abgeschlossen unter der Abbildung $\varphi \mapsto (\mathsf{E}\varphi)^\uparrow$. Es genügt demnach, Erfüllbarkeit für ungebündelte Modelle $\mathcal{M} = (\mathcal{T}, D, \cdot)$ zu untersuchen.

5.3.2 Quasimodelle

Wie bisher beruht die Idee des Entscheidbarkeitsbeweises darin, Modelle durch Quasimodelle zu kodieren. In diesem Abschnitt werden wir daher einige wichtige Begriffe unseren Zwecken anpassen müssen.

Sei φ ein $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}_1^w}$-Satz. Zur Vereinfachung werden wir annehmen, daß jeder *Teilsatz* von φ der Gestalt $\bigcirc\psi$ und $\bigcirc_P\psi$, durch $\bot\mathsf{U}\psi$ bzw. $\bot\mathsf{S}\psi$ ersetzt wurde. Damit wird $\bigcirc$ und $\bigcirc_P$ lediglich auf Formeln angewandt, die genau eine freie Variable besitzen. Wir reservieren nun für jede $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}^*}$-Formel $\varphi(x)$ der Gestalt $\bigcirc\psi(x)$ oder $\bigcirc_P\psi(x)$ unverbrauchte einstellige Prädikate P^i_φ sowie für jeden Satz φ der Gestalt $\mathsf{E}\psi$, $\psi_1\mathsf{U}\psi_2$ und $\psi_1\mathsf{S}\psi_2$ unverbrauchte Aussagenvariablen p^i_φ, mit $i = 0, 1, \ldots$ (beachte, daß wir im Gegensatz zum branchunabhängigen Fall QCTL hier eine Liste $\chi^0, \chi^1, \ldots$ solcher Abstraktionen benötigen, da die temporale Entwicklung branchabhängig ist; vergleiche die entsprechende Definition in Abschnitt 3.3). Die Formeln $P^i_\varphi(x)$ und p^i_φ werden *i-Surrogate* von $\varphi(x)$ und φ genannt. Für jede $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}^*}$-Formel $\varphi(x)$ bezeichnen wir mit φ^i das Ergebnis der Ersetzung aller Teilformeln von φ der Gestalt $\bigcirc\psi$, $\bigcirc_P\psi$ $\psi_1\mathsf{U}\psi_2$, $\psi_1\mathsf{S}\psi_2$ und $\mathsf{E}\psi$ in φ, die sich nicht im Wirkungsbereich eines anderen nichtklassischen Operators befinden durch ihre i-Surrogate. Damit ist φ^i eine reine (also nichttemporale) erststufige Formel. Setze $\Gamma^i = \{\varphi^i \mid \varphi \in \Gamma\}$ für jede Menge $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}^*}$.

Intuitiv repräsentiert jedes $i \geq 0$ einen Branch. Tatsächlich werden wir jedoch sehen, daß endlich viele $i \geq 0$ genügen, da wir Branches lediglich bezüglich einer gewissen Äquivalenzrelation repräsentieren werden (genauer gesagt, steht jedes i für eine „Art" Branch). Es wird sich zeigen, daß $\mathbf{n}(\varphi) = 4^{4^{|sub_x(\varphi)|}}$ eine obere Schranke für die benötigten i sein wird.

Definition 62 (State Candidate). Ein *State Candidate* für φ ist ein Paar $\Theta = (\mathcal{S}, \Upsilon)$ für das:

(i) $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_{n_\Theta}\}$, wobei $n_\Theta \leq \mathbf{n}(\varphi)$ eine natürliche Zahl ist, die von Θ abhängt und S_i, $i \leq n_\Theta$, eine Menge von Typen für φ, so daß für jeden Satz ψ und für beliebige $t, t' \in S_i$:
$$\psi \in t \quad \text{gdw.} \quad \psi \in t'$$

und für jede Formel der Gestalt $\mathsf{E}\psi$:

$$\mathsf{E}\psi \in \bigcap_{i\leq k}\bigcap S_i \quad \text{gdw.} \quad \mathsf{E}\psi \in \bigcup_{i\leq k}\bigcap S_i \quad \text{gdw.} \quad \psi \in \bigcup_{i\leq k}\bigcap S_i.$$

(ii) Υ ist die Menge aller Abbildungen $\tau : \{1,\ldots,n_\Theta\} \to \bigcup_{i\leq k} S_i$, genannt *Traces*, so daß $\big\{\{\tau(i) \mid \tau \in \Upsilon\} \mid i \leq n_\Theta\big\} = \mathcal{S}$.

Die Menge aller Sätze in $\bigcap\{\tau(i) \mid \tau \in \Upsilon\}$ wird mit $\Theta(i)$ bezeichnet. Für eine Trace τ setzen wir

$$\overline{\tau} = \bigcup_{i\leq n_\Theta} (\tau(i))^i \quad \text{und} \quad \overline{\Upsilon} = \{\overline{\tau} \mid \tau \in \Upsilon\}.$$

State Candidates repräsentieren States w in einem temporalen Modell. Die Überlegungen hinter diesem Begriff entsprechen denen der vorherigen Abschnitte. Wir bemerken hier lediglich, daß die jeweiligen Komponenten S_i eines State Candidates $\Theta = (\mathcal{S},\Upsilon)$ die entsprechenden States eines Momentes w in verschiedenen Branches repräsentieren, wohingegen eine Trace $\tau \in \Upsilon$ die Typen eines Elementes des Domains D in diesen States repräsentiert.

Definition 63. Sei $\Theta = (\mathcal{S},\Upsilon)$ ein State Candidate für φ und

$$\mathcal{M} = (D, P_0, P_1, \ldots)$$

eine erststufige Struktur in der Signatur von $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}^*}$. Für jedes $a \in D$ definieren wir die *Trace* von a (bezüglich Θ) als

$$tr(a) = \{\psi \in \bigcup_{i\leq n_\Theta} (sub_x\varphi)^i \mid \mathcal{M} \models \psi[a]\}.$$

Wir sagen, daß Θ durch $\mathcal{M}$ *realisiert* wird, wenn $\overline{\Upsilon} = \{tr(a) \mid a \in D\}$. Weiterhin sagen wir, daß Θ *realisierbar* ist, wenn ein $\mathcal{M}$ es realisiert.

Unmittelbar aus dieser Definition folgt:

Lemma 64. *Ein State Candidate $\Theta = (\mathcal{S},\Upsilon)$ für φ ist realisierbar gdw. der erststufige Satz*

$$\overline{\alpha}_\Theta = \bigwedge_{\tau\in\Upsilon} \exists x\, \overline{\tau} \ \wedge\ \forall x \bigvee_{\tau\in\Upsilon} \overline{\tau} \tag{17}$$

erfüllbar ist.

Definition 65 (Connection). Eine *Connection* ist ein Quadrupel (Δ,Θ,R,N). Dabei sind $\Delta = (\mathcal{S},\Upsilon)$ und $\Theta = (\mathcal{U},\mathcal{V})$ realisierbare State Candidates und $R \subseteq \Upsilon \times \mathcal{V}$ eine Relation mit Domain Υ und Wertebereich $\mathcal{V}$ sowie $N \subseteq \{1,\ldots,n_\Delta\} \times \{1,\ldots,n_\Theta\}$ eine Relation mit Wertebereich $\{1,\ldots,n_\Theta\}$, so daß für alle $(i,j) \in N$, alle $(\tau,\tau') \in R$ und alle $\bigcirc\psi \in sub_x\varphi$:

$$\bigcirc\psi \in \tau(i) \quad \text{gdw.} \quad \psi \in \tau'(j). \tag{18}$$

Eine Connection beschreibt, wie die abstrakte Repräsentierung Θ eines States v in Beziehung zu setzen ist mit der abstrakten Repräsentierung Δ des direkten Vorgängers w von v. Zu diesem Zweck ist die Relation R zwischen den beiden Mengen Θ und Δ eingeführt. Intuitiv zeigt $R(\tau, \tau')$ an, daß τ (die Trace in w) und τ' (die Trace in v) dasselbe Individuum zu verschiedenen Zeitpunkten repräsentiert. Die Tatsache, daß der Domain D konstant ist, gibt Anlaß zu der Beschränkung des Domains und Wertebereichs von R. $N(i,j)$ wiederum zeigt an, daß es einen Branch durch v (und folglich durch w) der „Art“ i in w und der „Art“ j in v gibt. Daß alle Branches, die durch v kommen auch durch w kommen, jedoch nicht umgekehrt, motiviert schließlich die Einschränkung an den Wertebereich von N.

Für einen ω-Baum $\mathcal{T} = (T, <)$ und jedes $w \in T$, bezeichnen wir mit $\mathcal{B}(w)$ die Menge aller Branches in $\mathcal{T}$, die durch w kommen.

Definition 66 (Quasimodell). Ein *Quasimodell* für φ über $\mathcal{T} = (T, <)$ ist eine Abbildung f, die der Wurzel w_0 von $\mathcal{T}$ ein Paar $f(w_0) = (\Theta_{w_0}, g_{w_0})$ zuordnet, worin Θ_{w_0} ein realisierbarer State Candidate ist, und jedem anderen $w \in T$ ein Paar $f(w) = (C_w, g_w)$ zuordnet, in dem $C_w = (\Delta_w, \Theta_w, R_w, N_w)$ eine Connection ist. Dabei sind alle g_w, $w \in T$, Funktionen von $\mathcal{B}(w)$ auf $\{1, \ldots, n_{\Theta_w}\}$, so daß:

1. wenn $w \in T$ der direkte Vorgänger von v ist, dann ist $\Theta_w = \Delta_v$ und $N_v = \{(g_w(\beta), g_v(\beta)) \mid \beta \in \mathcal{B}(w)\}$,
2. für alle $w \in T$ alle $\beta \in \mathcal{B}(w)$ und jeden Satz $\psi_1 \mathsf{U} \psi_2 \in sub_x\varphi$ gilt: $\psi_1 \mathsf{U} \psi_2 \in \Theta_w(g_w(\beta))$ gdw. es existiert ein $v > w$ mit $v \in \beta$, so daß $\psi_2 \in \Theta_v(g_v(\beta))$ und $\psi_1 \in \Theta_u(g_u(\beta))$ für alle u mit $w < u < v$.
3. für alle $\beta \in \mathcal{B}(w)$ und jeden Satz $\psi_1 \mathsf{S} \psi_2 \in sub_x\varphi$ gilt: $\psi_1 \mathsf{S} \psi_2 \in \Theta_w(g_w(\beta))$ gdw. es existiert ein $v < w$, so daß $\psi_2 \in \Theta_v(g_v(\beta))$ und $\psi_1 \in \Theta_u(g_u(\beta))$, für alle u mit $v < u < w$.

Wir sagen, daß f die Formel φ *erfüllt*, wenn es ein $w \in T$ gibt, so daß $\Theta_w = (\mathcal{S}_w, \Upsilon_w)$ und $\varphi \in \bigcup S$ für ein $S \in \mathcal{S}_w$.

Während sich Connections um lokale Formeln der Gestalt $\bigcirc\psi$ kümmern, tragen Quasimodelle Sorge für die restlichen (globalen) Temporaloperatoren.

5.3.3 Entscheidbarkeit

Satz 67. *Eine $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}_1^w}$-Formel φ ist erfüllbar in einem Modell gdw. es existiert ein Quasimodell das φ erfüllt.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Angenommen φ ist erfüllt in einem Modell. Wir können, wie im Beweis zu Lemma 43, dessen unter liegenden Baum $\mathcal{T}$ durch $\mathcal{T}^+ = \mathcal{T} \otimes ({}^{<\omega}\omega, \prec)$ ersetzen, wobei $\omega = \{0, 1, \ldots\}$. Jeder Branch von $\mathcal{T}$ wird dabei unendlich oft an jedem Knoten in $\mathcal{T}^+$ „dupliziert“. Dabei bleibt φ in dem resultierenden Modell $\mathcal{M} = (\mathcal{T}^+, D, \cdot)$ erfüllt. Folglich

$\mathcal{M}, \sigma, v \models^{\mathfrak{f}} \varphi$ für ein $v \in T^+$, $\sigma \in \mathcal{B}(v)$ ($\mathcal{B}$ definiert bezüglich $\mathcal{T}^+$) und eine Belegung $\mathfrak{f}$ in $\mathcal{M}$. Gegeben $w \in T^+$ und $\beta \in \mathcal{B}(w)$. Sei

$$S(\beta, w) = \{\mathrm{tp}(\beta, w, a) \mid a \in D\},$$

wobei

$$\mathrm{tp}(\beta, w, a) = \{\psi \in sub_x(\varphi) \mid \mathcal{M}, \beta, w \models \psi[a]\}.$$

Sei $\mathcal{S}_w = \{S(\beta, w) \mid \beta \in \mathcal{B}(w)\}$. Wir extrahieren aus $\mathcal{T}^+$ einen Teilbaum $\mathcal{T}' = (T', <')$, in dem jeder Knoten höchstens $\mathbf{m}(\varphi) = 2^{2^{|sub_x\varphi|}}$-viele direkte Nachfolger hat. Zu diesem Zweck definieren wir rekursiv $T'_n \subseteq T^+$ für jedes $n \geq 0$ mit dieser Eigenschaft. Sei dazu $T'_0 = \{w_0\}$, wobei w_0 die Wurzel von $\mathcal{T}^+$ ist. Gegeben T'_n. Für jedes $w \in T'_n$ mit $hg(w) = n$ und jedes $S \in \mathcal{S}_w$ selektieren wir ein $\beta_S \in \mathcal{B}(w)$, so daß $S(\beta_S, w) = S$ und (hier geht die Form von $\mathcal{T}^+$ ein) $\beta_S \cap T'_n = \beta_S \cap \beta_{S'} = \{v \in T^+ \mid v \leq w\}$ für verschiedene $S, S' \in \mathcal{S}_w$. Sei $\mathcal{B}_w = \{\beta_S \mid S \in \mathcal{S}_w\}$ und $T_w = \bigcup B_w$. Wir können annehmen, daß $\sigma \in \mathcal{B}_{w_0}$. Beachte, daß $|\mathcal{B}_w| \leq \mathbf{m}(\varphi)$. Sei dann $T'_{n+1} = T'_n \cup \bigcup\{T_w \mid w \in T'_n,\ hg(w) = n\}$. Schließlich setze $T' = \bigcup_{n<\omega} T'_n$. Klar, $\sigma \subseteq T'$ und $v \in T'$.

Sei $\mathcal{M}' = (\mathcal{T}', D, \cdot')$ und $\mathcal{T}'$ die Einschränkung von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{T}^+$ auf T'. Per Induktion über ψ ist dann leicht nachzuweisen, daß $\mathcal{M}, \beta, w \models^{\mathfrak{f}} \psi$ gdw. $\mathcal{M}', \beta, w \models^{\mathfrak{f}} \psi$ für alle Branches β in $\mathcal{T}'$ sowie alle $w \in \beta$. (Nimm zum Beispiel an, daß $\mathcal{M}, \beta, w \models^{\mathfrak{f}} \mathsf{E}\psi$. Dann existiert in $\mathcal{T}^+$ ein $\beta' \in \mathcal{B}(w)$, so daß $\mathcal{M}, \beta', w \models^{\mathfrak{f}} \psi$. Fixiere einen Branch γ in $\mathcal{T}'$ für den $S(\beta', w) = S(\gamma, w)$. Da ψ ein Satz ist, so haben wir $\mathcal{M}, \gamma, w \models^{\mathfrak{f}} \psi$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann aber $\mathcal{M}', \gamma, w \models^{\mathfrak{f}} \psi$ und damit $\mathcal{M}', \beta, w \models^{\mathfrak{f}} \mathsf{E}\psi$.)

Folglich erfüllt $\mathcal{M}'$ die Formel φ und wir können mit diesem statt mit dem ursprünglichen Modell $\mathcal{M}$ arbeiten. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim_w$ auf $\mathcal{B}(w)$ (jetzt in $\mathcal{T}'$) für $w \in T'$ durch $\beta \sim_w \beta'$, falls $\mathcal{M}', \beta, w \models^{\mathfrak{f}} \psi$ gdw. $\mathcal{M}', \beta', w \models^{\mathfrak{f}} \psi$ für jedes $\psi \in sub_x\varphi$ und alle Belegungen $\mathfrak{f}$. Die $\sim_w$-Äquivalenzklasse, die β erzeugt, wird mit $[\beta]_w$ bezeichnet.

Da lediglich $\bigcirc$ auf offene Formeln angewandt wird können wir zeigen, daß die Anzahl der $\sim_w$-Äquivalenzklassen durch $\mathbf{n}(\varphi)$ beschränkt wird. Um dies einzusehen, setzen wir für jedes $w \in T'$ alle vollen Branches β und β' in $\mathcal{B}(w)$ sowie jedes $d \geq 0$, $\beta \sim_w^d \beta'$, falls für alle $v \in T'$, mit $v \geq w$ und $hg(v) \leq hg(w) + d$:

1. $v \in \beta$ gdw. $v \in \beta'$,

2. für alle $v \in \beta$, alle Belegungen $\mathfrak{f}$ und alle $\psi \in sub_x\varphi$ mit höchstens $hg(w)+d-hg(v)$-vielen Vorkommnissen von $\bigcirc$ gilt, daß $\mathcal{M}', \beta, v \models^{\mathfrak{f}} \psi$ gdw. $\beta', v \models^{\mathfrak{f}} \psi$.

Eine Induktion über d zeigt, daß die Anzahl $\sharp(d)$ aller $\sim_w^d$-Klassen höchstens $\mathbf{m}(\varphi)^d \cdot 2^{(d+1)|sub_0\varphi|}$ (für beliebiges w) sein kann: Für $d = 0$ ist zu überprüfen, falls $\mathcal{M}', \beta, w \models \psi$ gdw. $\mathcal{M}', \beta', w \models \psi$ für jeden Satz $\psi \in sub_x\varphi$, dann $\beta \sim_w^0 \beta'$. Damit ist $\sharp(0) \leq 2^{|sub_0\varphi|}$. Angenommen die Behauptung gilt für d. Dann kann man zeigen, wenn $\beta, \beta' \in \mathcal{B}(w)$ einen direkten Nachfolger v von w enthalten, $\mathcal{M}', \beta, w \models \psi$ gdw. $\mathcal{M}', \beta', w \models \psi$ für jeden Satz $\psi \in sub_x\varphi$ sowie $\beta \sim_v^d \beta'$, daß dann $\beta \sim_w^{d+1} \beta'$. Beide Behauptungen lassen sich per Induktion über ψ in 2. oben zeigen. Damit folgt, daß $\sharp(d+1) \leq \mathbf{m}(\varphi) \cdot 2^{|sub_0(\varphi)|} \cdot \sharp(d)$ und damit $\sharp(d) \leq \mathbf{m}(\varphi)^d \cdot 2^{(d+1)|sub_0(\varphi)|}$ für alle d wie gewünscht. Schließlich ist noch zu prüfen, wenn $\beta \sim_w^{|sub_x(\varphi)|} \beta'$, dann $\beta \sim_w \beta'$; womit $\sim_w$ höchstens $\sharp(|sub_x(\varphi)|) \leq \mathbf{n}(\varphi)$-viele verschiedene Äquivalenzklassen besitzen kann.

Sei $\beta_1^w, \dots \beta_{n_w}^w$ eine minimale Liste von Branches, so daß $\{[\beta_1^w]_w, \dots, [\beta_{n_w}^w]_w\}$ die Menge aller $\sim_w$-Äquivalenzklassen ist. Jedem $a \in D$ können wir eine Trace

$$\tau_a^w : \{1, \dots, n_w\} \to \bigcup \mathcal{S}_w$$

zuordnen, mit $\tau_a^w(i) = \mathrm{tp}(\beta_i^w, w, a)$. Bezeichne die entstandene Menge Traces mit Υ_w. Sei $\Theta_w = (\mathcal{S}_w, \Upsilon_w)$ für alle $w \in T'$. Nun können wir das Quasimodell f über $\mathcal{T}'$ definieren, das φ erfüllt. Ist $w = w_0$ die Wurzel von $\mathcal{T}'$, dann setze $f(w_0) = (\Theta_{w_0}, g_{w_0})$; andernfalls sei $f(w) = ((\Theta_v, \Theta_w, R_w, N_w), g_w)$, wobei v der direkte Vorgänger von w in $\mathcal{T}'$ ist. Dabei ist

- $g_w(\beta) = i$ gdw. $\beta \in [\beta_i^w]_w$,
- $R_w = \{(\tau_a^v, \tau_a^w) \mid a \in D\}$,
- $N_w = \{(g_v(\beta), g_w(\beta)) \mid \beta \in B(w)\}$.

Wir haben zu zeigen, daß f ein Quasimodell ist. Zunächst ist klar, daß die erste Komponente aller $f(w)$, $w_0 \neq w$, eine Connection ist und die von $f(w_0)$ ein realisierbarer State Candidate. Wir überprüfen lediglich Punkt 2. aus Definition 66. Angenommen $g_w(\beta) = i$ und $\psi_1 \mathsf{U} \psi_2 \in \Theta_w(i)$. Da $\psi_1 \mathsf{U} \psi_2$ ein Satz ist, haben wir $\psi_1 \mathsf{U} \psi_2 \in \tau_a^w(i) = \mathrm{tp}(\beta_i^w, w, a) = \mathrm{tp}(\beta, w, a)$ für jedes $a \in D$. Damit existiert ein $v > w$ mit $v \in \beta$ und $\psi \in \mathrm{tp}(\beta, v, a)$ (weshalb $\psi_2 \in \Theta_v(g_v(\beta))$) und für alle u mit $w < u < v$ gilt $\psi_1 \in \mathrm{tp}(\beta, u, a)$ (folglich ist $\psi_1 \in \Theta_u(g_u(\beta))$). Die umgekehrte Richtung wird ganz analog gezeigt.

($\Leftarrow$) Angenommen f ist ein Quasimodell für φ über $\mathcal{T} = (T, <)$ mit Wurzel w_0. Sei $f(w_0) = (\Theta_{w_0}, g_{w_0})$ und $f(w) = (C_w, g_w) = ((\Delta_w, \Theta_w, R_w, N_w), g_w)$ für alle anderen $w \in T$. Sei $\Theta_w = (\mathcal{S}_w, \Upsilon_w)$ und $n_w = n_{\Theta_w}$.

Ein *Run* r in f ist eine Funktion, die jedem $w \in T$ eine Trace $r(w) \in \Upsilon_w$ so zuordnet, daß $(r(v), r(w)) \in R_w$, für alle $w \neq w_0$, mit direktem Vorgänger v. Unter Benutzung der Tatsache, daß der Wertebereich sowie der Domain von R_w jeweils mit $\{1, \dots, n_w\}$ und $\{1, \dots, n_v\}$ zusammenfallen, ist es nicht schwer einzusehen, daß für jedes w und alle $\tau \in \Upsilon_w$, ein Run r existiert, mit $r(w) = \tau$. Sei dann $\mathfrak{R}$ die Menge all dieser Runs.

Fixiere eine Kardinalzahl $\kappa \geq \aleph_0$, die die Kardinalität von $\mathfrak{R}$ übersteigt. Mit Hilfe der klassischen Modelltheorie folgt (beachte abermals, daß die Sprache abzählbar ist und nicht die Gleichheit enthält; siehe Lemma 15), daß wir für jedes $w \in T$ eine erststufige $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}_w$ mit Domain

$$D = \{(r, \xi) \mid r \in \mathcal{R}, \xi < \kappa\}$$

finden können, die $\Theta_w = (\mathcal{S}_w, \Upsilon_w)$ realisiert und für die gilt, wenn $i \in \{1, \dots, n_w\}$, $r \in \mathfrak{R}$, $\xi < \kappa$ und $\psi \in sub_x\varphi$, dann

$$\psi \in \big(r(w)\big)(i) \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{M}_w \models \psi^i[(r, \xi)]. \tag{19}$$

Sei $\mathcal{M} = (\mathcal{T}, D, \cdot)$ und $\mathfrak{f}$ eine Belegung in $\mathcal{M}$. Per Induktion zeigen wir, daß für alle $\psi \in sub_x\varphi$, alle $w \in T$ und jedes $\beta \in \mathcal{B}(w)$ mit $g_w(\beta) = i$ gilt:

$$\mathcal{M}_w, \mathfrak{f} \models \psi^i \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{M}, \beta, w \models^{\mathfrak{f}} \psi.$$

Gemäß der Definition von $\mathcal{M}$, ist der Fall für atomares ψ nicht schwer, da $\psi^i = \psi$. Das gleiche gilt für die Boolschen Beweisschritte. Angenommen $\psi = \psi_1 \mathsf{U} \psi_2$; dann ist ψ ein Satz und für alle $r \in \mathfrak{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_w, \mathfrak{f} \models p^i_\psi \Leftrightarrow\ & \psi_1 \mathsf{U} \psi_2 \in r(w)(g_w(\beta)), \text{ nach (19)} \\
\Leftrightarrow\ & \exists v > w \big(v \in \beta \wedge \psi_2 \in r(v)(g_v(\beta)) \wedge \\
& \quad \forall u (w < u < v \to (\psi_1 \in r_u(g_u(\beta))))\big), \text{ da } r \text{ ein Run und } \psi \text{ ein Satz} \\
\Leftrightarrow\ & \exists v > w \, (v \in \beta \wedge \mathcal{M}_v, \mathfrak{f} \models \psi_2^{g_v(\beta)} \wedge \forall u (w < u < v \to \mathcal{M}_u, \mathfrak{f} \models \psi_1^{g_u(\beta)}), \\
& \text{wegen (19)} \\
\Leftrightarrow\ & \exists v > w (u \in \beta \wedge \mathcal{M}, \beta, v \models^{\mathfrak{f}} \psi_2 \wedge \forall u (w < u < v \to \mathcal{M}, \beta, u \models^{\mathfrak{f}} \psi_1), \\
& \text{nach Ind.vor.} \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{M}, \beta, w \models^{\mathfrak{f}} \psi.
\end{aligned}$$

Sei $\psi = \mathsf{E}\chi$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_w, \mathfrak{f} \models p^i_\psi \Leftrightarrow\ & \mathsf{E}\chi \in r(w)(g_w(\beta)), \text{ nach (19)} \\
\Leftrightarrow\ & \chi \in r(w)(g_w(\beta')) \text{ für ein } \beta' \in \mathcal{B}(w), \text{ da } \Theta_w \text{ ein} \\
& \text{State Candidate, } g_w \text{ surjektiv und } \psi \text{ ein Satz} \\
\Leftrightarrow\ & \exists \beta' \, (\beta' \in \mathcal{B}(w) \wedge \mathcal{M}_w, \mathfrak{f} \models \chi^{g_w(\beta')}), \text{ wegen (19)} \\
\Leftrightarrow\ & \exists \beta' \, (\beta' \in \mathcal{B}(w) \wedge \mathcal{M}, \beta', w \models^{\mathfrak{f}} \chi), \text{ nach Ind.vor.} \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{M}, \beta, w \models \mathsf{E}\chi.
\end{aligned}$$

Angenommen $\psi = \bigcirc\chi$. Dann gilt für jedes $r \in \mathfrak{R}$ und alle $\xi < \kappa$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_w \models P^i_\psi[(r,\xi)] \Leftrightarrow\ & \bigcirc\chi \in r(w)(g_w(\beta)), \text{ nach (19)} \\
\Leftrightarrow\ & \chi \in r(v)(g_v(\beta)) \text{ für den direkten Nachfolger } v \text{ von } w \text{ in } \beta, \\
& \text{da } C_v \text{ eine Connection und } r \text{ ein Run} \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{M}_v \models \chi^{g_v(\beta)}[(r,\xi)], \text{ wegen (19)} \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{M}, \beta, v \models \chi[(r,\xi)], \text{ nach Ind.vor.} \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{M}, \beta, w \models \bigcirc\chi[(r,\xi)].
\end{aligned}$$

Da $\varphi \in r(w)(g_w(\beta))$ für ein $w \in T$ ein $\beta \in \mathcal{B}(w)$ und ein $r \in \mathfrak{R}$, so folgt schließlich $\mathcal{M}, \beta, w \models \varphi$. $\square$

Wir werden nun die Reduktion von QPCTL_1^w auf nichtlokales CTL^* angeben, indem wir Quasimodelle durch nichtlokale propositionale Modelle kodieren. Abermals sei ein $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}_1^w}$-Satz φ fixiert.

Jedem realisierbaren State Candidate $\Theta = (\mathcal{S}, \Upsilon)$ für φ, jeder Connection C und jedem $i \leq \mathbf{n}(\varphi)$ können wir jeweils eine Aussagenvariable p_Θ, p_C und p_i zuordnen. Seien $\mathcal{R}(\varphi)$ und $\mathcal{C}(\varphi)$ jeweils die Menge der realisierbaren State Candidates bzw. Connections für φ. Für jeden Satz $\psi \in sub_x\varphi$ sei

$$\psi^\sharp = \Bigg(\bigvee_{\substack{\Theta \in \mathcal{R}(\varphi),\\ i \leq n_\Theta, \psi \in \Theta(i)}} (p_i \wedge p_\Theta \wedge \neg \Diamond_P \top) \Bigg) \vee \Bigg(\bigvee_{\substack{C = (\Delta, \Theta, R, N) \in \mathcal{C}(\varphi),\\ i \leq n_\Theta, \psi \in \Theta(i)}} (p_i \wedge p_{\mathcal{C}} \wedge \Diamond_P \top) \Bigg).$$

Setze

$$\varphi^\star = \varphi^\sharp \wedge \big((\nu \wedge \neg \Diamond_P \top) \vee \Diamond_P (\nu \wedge \neg \Diamond_P \top) \big),$$

wobei ν die Konjunktion der nachfolgend aufgeführten Formeln (20)–(25) ist.

$$\bigvee_{\Theta \in \mathcal{R}(\varphi)} \mathsf{A} p_\Theta \wedge \bigwedge_{\Theta \neq \Theta'} \mathsf{A}(p_\Theta \to \neg p_{\Theta'}), \qquad \mathsf{A}\Box \Big(\bigvee_{C \in \mathcal{C}(\varphi)} \mathsf{A} p_C \wedge \bigwedge_{C \neq C'} \mathsf{A}(p_C \to \neg p_{C'}) \Big). \tag{20}$$

Die Formeln in (20) sagen, daß die p_Θ und die p_C lokal sind (damit können wir $w \models p_\Theta$ und $w \models p_C$ schreiben) sowie, daß genau ein p_Θ an der Wurzel und genau ein p_C an jedem anderen Punkt des Baumes gelten.

Intuitiv sagt $w \models p_C$, daß $f(w) = (C, g)$ für ein g. Ein Paar Connections (C_1, C_2) heißt *suitable*, falls der zweite State Candidate in C_1 mit dem ersten State Candidate in C_2 zusammenfällt. Die Menge aller Suitable Pairs von Connections soll mit $\mathcal{C}_s(\varphi)$ bezeichnet werden. Ein Paar (Θ, C) heiße *suitable*, falls der erste State Candidate in C gerade Θ ist. Die Menge aller Suitable Pairs dieser Form wird mit $\mathcal{R}_s(\varphi)$ bezeichnet. Die folgenden Formeln sagen, daß das Paar induziert durch einen Punkt und dessen direkten Vorgänger, suitable ist:

$$\mathsf{A} \bigvee_{(\Theta, C) \in \mathcal{R}_s(\varphi)} (p_\Theta \wedge \bigcirc p_C), \qquad \mathsf{A}\Box \bigvee_{(C_1, C_2) \in \mathcal{C}_s(\varphi)} (p_{C_1} \wedge \bigcirc p_{C_2}). \tag{21}$$

Die Intention, daß die p_i die g_w kodieren wird durch die folgenden Formeln gesichert. Ist nämlich $1 \leq i \leq \mathbf{n}(\varphi)$, dann bedeutet $\beta, w \models p_i$ gerade $g_w(\beta) = i$ (an dieser Stelle geht die Nichtlokalität der Semantik ein)

$$\mathsf{A} \bigwedge_{1 \leq i < j \leq \mathbf{n}(\varphi)} (p_i \to \neg p_j), \quad \mathsf{A}\Box \bigwedge_{1 \leq i < j \leq \mathbf{n}(\varphi)} (p_i \to \neg p_j), \tag{22}$$

$$\bigwedge_{\Theta \in \mathcal{R}(\varphi)} \Big(p_\Theta \to \bigwedge_{1 \leq i \leq n_\Theta} \mathsf{E} p_i \wedge \mathsf{A} \bigvee_{1 \leq i \leq n_\Theta} p_i \Big), \qquad \mathsf{A}\Box \bigwedge_{C \in \mathcal{C}(\varphi)} \Big(p_C \to \bigwedge_{1 \leq i \leq n_\Theta} \mathsf{E} p_i \wedge \mathsf{A} \bigvee_{1 \leq i \leq n_\Theta} p_i \Big). \tag{23}$$

Wir nehmen hier und im weiteren an C stehe für (Δ, Θ, R, N). Es verbleibt uns nun noch zu sichern, daß die Bedingungen aus Definition 66 erfaßt werden. Zuerst geben wir eine Formel an die sagt, daß N in C durch die Funktionen g_w bestimmt ist:

$$\mathsf{A}\Box \bigwedge_{C \in \mathcal{C}(\varphi)} \Big(p_C \to \big(\bigwedge_{(i,j)\in N} \mathsf{E}(p_j \wedge \bigcirc_P p_i) \wedge \mathsf{A} \bigvee_{(i,j)\in N} (p_j \wedge \bigcirc_P p_i)\big)\Big). \tag{24}$$

Um schließlich noch die Bedingung 2 aus Definition 66 wiederzugeben, fügen wir für jeden Satz $\psi_1 \mathsf{U} \psi_2 \in sub_x\varphi$ die folgende Formel hinzu (entsprechend für S):

$$\mathsf{A}\Box^+ \big((\psi_1 \mathsf{U} \psi_2)^\sharp \leftrightarrow (\psi_1^\sharp \mathsf{U} \psi_2^\sharp)\big). \tag{25}$$

Satz 68. *Ein $\mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}_1^\omega}$-Satz φ ist erfüllbar in einem Modell gdw. die $\mathcal{L}_{\mathsf{CTL}^*}$-Formel $\varphi^\star$ ist erfüllbar in einem nichtlokalen Modell.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Wenn φ erfüllbar ist, dann existiert nach Satz 67 ein Quasimodell f für φ über einem ω-Baum $\mathcal{T} = (T, <)$. Sei $f(w) = (C_w, g_w) = ((\Delta_w, \Theta_w, N_w, R_w), g_w)$, falls w nicht die Wurzel von $\mathcal{T}$ ist, und sonst $f(w_0) = (\Theta_{w_0}, g_{w_0})$. Die (propositionale) Belegung $\mathfrak{v}$ in $\mathcal{T}$ wird für alle $w \in T$ und jedes $\beta \in \mathcal{B}(w)$ wir folgt definiert:

- $(\beta, w) \in \mathfrak{v}(p_\Theta)$ gdw. $\Theta = \Theta_w$ für jeden realisierbaren State Candidate Θ,
- $(\beta, w) \in \mathfrak{v}(p_C)$ gdw. $C = C_w$ für jede Connection C (wobei $w \neq w_0$),
- $(\beta, w) \in \mathfrak{v}(p_i)$ gdw. $g_w(\beta) = i$ für alle $i < \mathbf{n}(\varphi)$.

Wir können nun zeigen, daß $\varphi^\star$ erfüllbar ist in dem Modell $\mathcal{M} = (\mathcal{T}, \mathfrak{v})$. Zunächst folgt unmittelbar aus den gegebenen Definitionen, daß für jeden Satz $\psi \in sub_x\varphi$,

$$\beta, w \models \psi^\sharp \iff \psi \in \Theta_w(g_w(\beta)). \tag{26}$$

Da $\varphi \in \Theta_w(g_w(\beta))$ für ein $w \in T$ und $\beta \in \mathcal{B}(w)$, so folgt $\mathcal{M}, \beta, w \models \varphi^\sharp$. Wir zeigen nun, daß $\beta, w \models (\nu \wedge \neg\Diamond_P\top) \vee \Diamond_P(\nu \wedge \neg\Diamond_P\top)$ bzw. $\beta, w_0 \models \nu$, worin w_0 die Wurzel von $\mathcal{T}$ ist (wir betrachten lediglich die Formeln (24) und (25)).

Zu (24). Angenommen $\gamma, v \models p_C$ für einen Branch γ in $\mathcal{T}$ und ein $v \in \gamma$ mit $v \neq w_0$. nach Definition von $\mathfrak{v}(p_C)$ haben wir $C = C_v$. Gemäß Definition 66 existiert zu jedem Paar $(i,j) \in N_v$ ein Branch in $\mathcal{B}(v)$, sagen wir γ', so daß $g_v(\gamma') = j$ und $g_u(\gamma') = i$ für den direkten Vorgänger u von v. Folglich gilt $\gamma', v \models p_j$ und $\gamma', u \models p_i$, weswegen $\gamma, v \models \mathsf{E}(p_j \wedge \bigcirc_P p_i)$ für alle $(i,j) \in N_v$. Ebenfalls nach Definition 66 existiert zu jedem Branch $\gamma' \in \mathcal{B}(v)$ ein Paar $(i,j) \in N_v$ mit $g_v(\gamma') = j$ und $g_u(\gamma') = i$, wobei u der direkte Vorgänger von v in $\mathcal{T}$. Das heißt, daß $(\gamma', v) \models p_j$ und $\gamma', u \models p_i$. Schließlich erhalten wir damit $\gamma, v \models \mathsf{A}\bigvee_{(i,j)\in N_v}(p_j \wedge \bigcirc_P p_i)$. (25) folgt direkt aus (26) sowie Bedingung 2 in Definition 66.

($\Leftarrow$) Umgekehrt nimm an, daß $\mathcal{M} = (\mathcal{T}, \mathfrak{v})$ die Formel $\varphi^\star$ erfüllt. Dann ist ν wahr an der Wurzel w_0 von $\mathcal{T}$. Wir definieren das Quasimodell f durch $f(w) = (C_w, g_w) = ((\Delta_w, \Theta_w, N_w, R_w), g_w)$, falls $w \neq w_0$, und $f(w_0) = (\Theta_{w_0}, g_{w_0})$, wobei

- Θ_{w_0} das eindeutig bestimmte Θ ist für das $w_0 \models p_\Theta$ (unabhängig vom Branch der Bewertung),

- für $w \neq w_0$, C_w das eindeutig bestimmte C ist für das $w \models p_C$,

- $g_w(\beta) = i$ das eindeutig bestimmte i ist für das $\beta, w \models p_i$.

Wir zeigen, daß f ein Quasimodell ist. Dazu haben wir die Bedingungen aus Definition 66 zu überprüfen. Der erste Teil der Bedingung 1 folgt aus der Definition eines Suitable Pair sowie den Formeln (20) und (21). Angenommen $(i, j) \in N_w$. Wegen $w \models p_{C_w}$ folgt mit (24), $w \models \mathsf{E}(p_j \wedge \bigcirc_P p_i)$. Damit existiert ein $\sigma \in \mathcal{B}(w)$ mit $\sigma, w \models p_j \wedge \bigcirc_P p_i$. Dann ist $g_w(\sigma) = j$ und $g_v(\sigma) = i$ für den direkten Vorgänger v von w. Umgekehrt nimm an, daß $g_w(\sigma) = j$ und $g_v(\sigma) = i$, wobei v der direkte Vorgänger von w ist. Folglich gilt $\sigma, v \models p_i$ und $\sigma, w \models p_j$. Damit gilt $w \models \mathsf{E}(p_j \wedge \bigcirc_P p_i)$ und wegen (24) und (22), $(i, j) \in N_w$. Der zweite Teil der Bedingung 1 in Definition 66 ist damit erfüllt. Schließlich folgt Bedingung 2 aus (25) und (26).

Wir müssen noch zeigen, daß f die Formel φ erfüllt. Nach Annahme existiert ein $w \in T$ und ein $\beta \in \mathcal{B}(w)$, so daß $\beta, w \models \varphi^\star$; folglich gilt $\beta, w \models \varphi^\sharp$. Mit (26) haben wir dann, daß $\varphi \in \Theta_w(g_w(\beta))$. Damit ist φ in f erfüllt. □

Ist $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}_1^w}$ ein Fragment für das entschieden werden kann, ob ein gegebener State Candidate für einen Satz $\varphi \in \mathcal{L}$ realisierbar ist, dann ist die Abbildung

$$\cdot^\star : \mathcal{L}_1^w \to \mathcal{L}_{\mathsf{CTL}^*}$$

effektiv und wir erhalten schließlich:

Satz 69. *Sei $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_{\mathsf{QPCTL}_1^w}$. Nimm an, daß für jeden Satz $\varphi \in \mathcal{L}$ entschieden werden kann, ob ein gegebener State Candidate für φ realisierbar ist. Dann ist das Erfüllbarkeitsproblem für $\mathcal{L}$-Formeln entscheidbar.*

Wenn $\mathcal{L}$ darüber hinaus abgeschlossen ist unter der Abbildung $\varphi \mapsto (\mathsf{E}\varphi)^\uparrow$ (mit neuen Aussagenvariablen q), dann ist das Erfüllbarkeitsproblem für $\mathcal{L}$-Sätze auch in allgemeinen Modellen entscheidbar.

Beweis. Der erste Teil folgt aus Theorem 45 und Theorem 68. Der zweite Teil folgt aus dem ersten sowie Lemma 61. □

Diskussion

Sei $\mathsf{Q}{-}_1$ das monodische Fragment einer der von uns untersuchten Logiken. Das *Zweivariablenfragment* von $\mathcal{L}_{\mathsf{Q}-_1}$ besteht aus allen $\mathcal{L}_{\mathsf{Q}-_1}$-Formeln, die höchstens zwei Variablen enthalten, sagen wir x und y. Es ist offensichtlich, daß für jeden State Candidate S bzw. Θ für einen Satz $\varphi \in \mathcal{L}$, der Satz $\overline{\alpha}_S$ (siehe Seite 50) bzw. $\overline{\alpha}_\Theta$ (17) im Zweivariablenfragment von $\mathcal{L}_{\mathsf{QL}}$ liegt. Das Zweivariablenfragment von $\mathcal{L}_{\mathsf{QL}}$ ist entscheidbar [39]. Damit ist entscheidbar, ob ein gegebener State Candidate für φ realisierbar ist. Als Konsequenz aus Satz 54 und Satz 69 erhalten wir das

Korollar 70. *Das Erfüllbarkeitsproblem für das Zweivariablenfragment von* $\mathsf{Q}-_1$ *ist entscheidbar.*

Das *monadische Fragment* von $\mathcal{L}_{\mathsf{Q}-_1}$ besteht aus allen $\mathcal{L}_{\mathsf{Q}-_1}$-Formeln, die lediglich null- und einstellige Prädikatensymbole enthalten. In derselben Weise wie oben erhalten wir aus der Entscheidbarkeit des monadischen Fragments der Prädikatenlogik:

Korollar 71. *Das Erfüllbarkeitsproblem für das monadische Fragment von* $\mathsf{Q}-_1$ *ist entscheidbar.*

Das *Guarded Fragment* von $\mathcal{L}_{\mathsf{Q}-_1}$ besteht aus allen $\mathcal{L}_{\mathsf{Q}-_1}$-Formeln, in denen jedes Vorkommen von $\forall$ dem „guarded" Muster $\forall\overline{y}(\rho(\overline{x},\overline{y}) \to \varphi(\overline{x},\overline{y}))$ folgt. Dabei ist ρ atomar und erfaßt alle in φ frei vorkommenden Variablen. (Die genaue Definition ist dem linearen Fall [29, Definition 72] zu entnehmen.) Aus der Entscheidbarkeit des Guarded Fragments der Prädikatenlogik [1, 22] folgt:

Korollar 72. *Das Erfüllbarkeitsproblem für das Guarded Fragment von* $\mathsf{Q}-_1$ *ist entscheidbar.*

Ähnliche Aussagen lassen sich für das *Loosely Guarded* und das *Packed* (oder *Clique-Guarded*) Fragment von $\mathsf{Q}-_1$ formulieren (siehe [6, 37, 21]). Darüber hinaus kann in diesen Fällen die Gleichheit hinzugefügt werden [26].

6 Anwendungen

Für sich betrachtet sind die in dieser Arbeit vorgestellten Resultate zunächst aus technischer Sicht interessant. In diesem Abschnitt wollen wir darüber hinaus am Beispiel *temporaler Beschreibungslogik* und *Raum-Zeit Logik* zeigen, wie sich die Ergebnisse aus Abschnitt 5 auf Formalismen zur Wissensrepräsentation und -verarbeitung übertragen lassen.

Beschreibungslogik ist ihrem Ursprung nach ein statischer Formalismus. Sie ist damit alleine nicht in der Lage, etwa die dynamischen Aspekte zeit- und handlungsabhängiger „intelligenter" Agenten zu erfassen. So könnte etwa ein Autohersteller seine potentiellen Kunden wie folgt beschreiben:

$$\mathsf{Customer} = \mathsf{Homo\_sapiens} \cap \exists \mathsf{buys}.\mathsf{Car}$$

$$\mathsf{Potential\_Customer} = \mathsf{E}\Diamond\mathsf{Customer}.$$

Die erste der beiden Formeln bringt die Tatsache zum Ausdruck, daß ein Kunde ein Mensch ist, der ein Auto erwirbt. Die zweite Formel sagt, daß ein potentieller Kunde jemand ist, der möglicherweise irgenwann einmal ein Kunde sein wird. Temporale Beschreibungslogik repräsentiert also Informationen über die zeitliche Dynamik komplexer Eigenschaften von Objekten eines Domains.

Zur zweiten der beiden oben erwähnten Logiken. Angenommen, wir wollten einen logischen Formalismus definieren, der in der Lage ist, das Wissen über sich in der Zeit verändernde räumliche Gebiete abzubilden. Zu diesem Zweck wählen wir uns einen (statischen) Formalismus zur qualitativen Beschreibung räumlicher Phänomene gemeinsam mit einer passenden Zeitlogik und versuchen beide zu kombinieren. Räumliche Bereiche lassen sich in *topologischen Räumen* interpretieren, der Verlauf der Zeit, wie in dieser Arbeit geschehen, in Bäumen. Wir werden hier den Formalismus $\mathcal{BRCC}$-8 zur qualitativen Beschreibung räumlicher Phänomene aufgreifen und mit der uns vertrauten Semantik von CTL kombinieren. Auf diese Weise ließe sich der Satz „Es ist möglich, daß sich irgend wann einmal die territoriale Ausdehnung der EU nicht mehr verändert" wie folgt formalisieren:

$$\mathsf{E}\Diamond\mathsf{A}\Box\mathsf{EQ}(\mathsf{A}\bigcirc EU, EU).$$

Hierbei ist $\mathsf{EQ}(X, Y)$ ein zweistelliges Predikat, das ausdrückt, daß die beiden Gebiete X und Y zusammenfallen. Wir beginnen unsere Diskussion mit der Beschreibungslogik ALC.

6.1 Temporale Beschreibungslogik

Ausgehend von ALC [8] einer Beschreibungslogik, die zunächst als statischer Formalismus entwickelt wurde, sind bisher lediglich Verallgemeinerungen auf den Fall linearer Zeit genauer untersucht worden (vergleiche etwa [2, 20, 30]). Wir werden hier die temporalisierte Version TALC von ALC einführen, die zusätzlich über die Pfadquantoren E und A verfügt. Entsprechend besteht das Alphabet von TALC aus

– *Namen für Konzepte* $C_0, C_1, \ldots,$

- *Namen für Rollen* R_0, R_1, ...,
- *Namen für Objekte* a_0, a_1, ...,
- *Boolsche Operatoren für Konzepte* $\sqcap$, $\neg$,
- *Existenzquantor* $\exists$,
- *Boolsche Operatoren für Formeln* $\wedge$, $\neg$
- *Temporaloperatoren* E, A, $\bigcirc$, U.

Konzeptnamen denotieren Klassen von *Objekten* in bestimmten Domainen, etwa Δ. Namen für Rollen dienen der Bezeichnung von zweistelligen *Relationen* zwischen Elementen von Δ. Ein Objektname steht jeweils für ein bestimmtes Element aus Δ.

Beginnend mit diesem Alphabet, definieren wir (komplexe) *Konzepte* und *Formeln* von TALC wie folgt: Jeder Konzeptname ist ein (atomares) Konzept. Sind C und D Konzepte, a und b Namen für Objekte und R ein Rollenname, dann sind

- $C \sqcap D$, $\neg C$, $\exists R.C$, $\mathsf{E}\bigcirc C$, $\mathsf{A}\bigcirc C$, $\mathsf{E}(C\mathsf{U}D)$ und $\mathsf{A}(C\mathsf{U}D)$ Konzepte,
- $C = D$, $a : C$, aRb atomare Formeln,
- Boolsche Kombinationen von Formeln,
- $\mathsf{E}\bigcirc\psi$, $\mathsf{A}\bigcirc\psi$, $\mathsf{E}(\psi\mathsf{U}\psi')$ und $\mathsf{A}(\psi\mathsf{U}\psi')$ Formeln, falls ψ und ψ' Formeln sind.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}_{\mathsf{TALC}}$ die Sprache von TALC. Damit ist eine TALC-*Wissensbasis* eine endliche Menge von $\mathcal{L}_{\mathsf{TALC}}$-Formeln. Bezeichnet S beispielsweise das Konzept *sterbliches Lebewesen*, dann ließe sich in $\mathcal{L}_{\mathsf{TALC}}$ der Satz „Sterbliche Lebewesen sind genau die Lebewesen, die irgendwann sterben" etwa wie folgt formalisieren:

$$S = \mathsf{Lebewesen} \sqcap \mathsf{A}(\mathsf{Lebewesen}\mathsf{U}(\mathsf{A}\Box\neg\mathsf{Lebewesen})).$$

Die (ungebündelte) Semantik von TALC wird auf die folgende Weise definiert. Ein TALC-*Modell* ist eine Struktur der Form $\mathcal{M} = (\mathcal{T}, \Delta, \cdot)$, wobei $\mathcal{T}$ ein ω-Baum $(T, <)$, Δ eine nicht-leere Menge, der *Domain* von $\mathcal{M}$ und $\cdot$ eine Funktion ist, die jedem Zeitpunkt $w \in T$ ein ALC-Modell

$$\mathcal{M}_w = (\Delta, R_0^w, \ldots, C_0^w, \ldots, a_0, \ldots),$$

zuordnet. Dabei ist für alle $i = 0, 1, \ldots$

- R_i^w eine zweistellige Relation über Δ (die den Rollennamen R_i in w interpretiert),
- C_i^w eine Teilmenge von Δ (die den Namen des Konzepts C_i in w interpretiert) und
- a_i ein Element von Δ (das den Objektnamen a_i interpretiert).

Gegeben ein Konzept C und eine Rolle R. Für jedes $w \in T$ sind der *Wert* $C^{\mathcal{M},w}$ von C in $\mathcal{M}$ zum Zeitpunkt w und die *Wahrheitsrelation* $\mathcal{M}, w \models \varphi$ für eine $\mathcal{L}_{\mathsf{TALC}}$-Formel φ wie folgt definiert; zunächst die Konzepte:

- $(C \cap D)^{\mathcal{M},w} = C^{\mathcal{M},w} \cap D^{\mathcal{M},w}$,
- $(\neg C)^{\mathcal{M},w} = \Delta \setminus C^{\mathcal{M},w}$,
- $(\exists R.C)^{\mathcal{M},w} = \{x \in \Delta \mid \exists y \in C^{\mathcal{M},w} x R^w y\}$,
- $x \in (\mathsf{E}\bigcirc C)^{\mathcal{M},w}$ gdw. es gibt einen direkten Nachfolger w' von w in $\mathcal{T}$, so daß $x \in C^{\mathcal{M},w'}$ (analog für $\mathsf{A}\bigcirc C$),
- $x \in \mathsf{E}(C \mathsf{U} D)^{\mathcal{M},w}$ gdw. es existiert ein $v \geq w$ mit $x \in D^{\mathcal{M},v}$, und $x \in C^{\mathcal{M},u}$, falls $w \leq u < v$,
- $x \in \mathsf{A}(C \mathsf{U} D)^{\mathcal{M},w}$ gdw. für alle Branches β in $\mathcal{T}$ die durch w kommen, existiert ein $v \in \beta$, so daß $v \geq w$, $x \in D^{\mathcal{M},v}$ und $x \in C^{\mathcal{M},u}$, falls $w \leq u < v$.

Die Wahrheitsrelation:

- $\mathcal{M}, w \models a : C$ gdw. $a \in C^{\mathcal{M},w}$,
- $\mathcal{M}, w \models aRb$ gdw. $aR^w b$
- $\mathcal{M}, w \models C = D$ gdw. $C^{\mathcal{M},w} = D^{\mathcal{M},w}$,
- $\mathcal{M}, w \models \psi \wedge \psi'$ gdw. $\mathcal{M}, w \models \psi$ und $\mathcal{M}, w \models \psi'$,
- $\mathcal{M}, w \models \neg\psi$ gdw. nicht $\mathcal{M}, w \models \psi$,
- die Temporaloperatoren werden wie für QCTL definiert.

Eine Formel φ ist *wahr* in $\mathcal{M}$, wenn $\mathcal{M}, w \models \varphi$, für ein $w \in T$. Eine Formel φ heißt *erfüllbar*, wenn sie wahr ist in einem Modell. Schließlich ist ein Konzept C *erfüllbar*, falls es ein Modell $\mathcal{M}$ gibt, mit $C^{\mathcal{M},w} \neq \emptyset$ für ein $w \in T$.

Wir definieren nun eine Einbettung $\cdot^T$ von $\mathcal{L}_{\mathsf{TALC}}$ in $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$ wie folgt: Fixiere zwei verschiedene Individuenvariablen, sagen wir x und y, und setze $R_i^T = R_i(x, y)$ für jedes $i = 0, 1, \ldots$. Die Übersetzung C^T eines Konzepts C ist eine Formel mit *einer* freien Variablen x, wobei:

$C_i^T = C_i(x)$ für alle $i = 0, 1, \ldots$,

$(C \cap D)^T = C^T \wedge D^T$,

$(\neg C)^T = \neg C^T$,

$(\exists R.C)^T = \exists y(R^T \wedge C^T(y/x))$,

$(\mathsf{E}\bigcirc C)^T = \mathsf{E}\bigcirc C^T$ (analog für $\mathsf{A}\bigcirc C$),

$\mathsf{E}(C\mathsf{U}D)^T = \mathsf{E}(C^T\mathsf{U}D^T)$ (entsprechend für $\mathsf{A}(C\mathsf{U}D)$).

Komplexe Formeln werden wie folgt behandelt (dabei nehmen wir an, daß Objektnamen von TALC mit den Symbolen für Konstanten in QCTL zusammenfallen):

$(C = D)^T = \forall x(C^T \leftrightarrow D^T)$,

$(a : C)^T = C^T(a/x)$,

$(aRb)^T = R^T(a/x, b/y)$,

$(\psi \wedge \psi')^T = \psi^T \wedge \psi'^T$, $(\neg\psi)^T = \neg\psi^T$,

$(\mathsf{E}\bigcirc\psi)^T = \mathsf{E}\bigcirc\psi^T$, $(\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2)^T = \mathsf{E}\psi_1^T\mathsf{U}\psi_2^T$ (analog für $\mathsf{A}\bigcirc\psi$ und $\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$).

Wir können zeigen, daß das *Erfüllbarkeitsproblem* für TALC auf das von QCTL_1 reduziert werden kann.

Lemma 73. (i) *Für ein $\mathcal{L}_{\mathsf{TALC}}$-Konzept C: C ist erfüllbar in einem TALC-Modell gdw. $\exists x C^T$ ist erfüllbar in einem QCTL-Modell.*

(ii) *Für eine $\mathcal{L}_{\mathsf{TALC}}$-Formel φ: φ ist erfüllbar in einem TALC-Modell gdw. φ^T ist erfüllbar in einem QCTL-Modell.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß ein beliebiges TALC-Modell für eine $\mathcal{L}_{\mathsf{TALC}}$-Formel φ aufgefaßt werden kann, als ein QCTL-Modell, das φ^T interpretiert und umgekehrt. Sei also $\mathcal{M} = (\mathcal{T}, \Delta, \cdot)$ ein TALC-Modell über einem Baum $\mathcal{T} = (T, <)$, $w \in T$ und $a \in \Delta$.

(i) Wir zeigen per Induktion über C:

$$a \in C^{\mathcal{M},w} \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{M}, w, \mathfrak{f}_a \models C^T(x),$$

wobei $\mathfrak{f}_a$ jede Variable in *var* auf a abbildet. Der Fall, in dem C atomar oder eine Boolsche Kombination anderer Konzepte ist, ist einfach. Wir nehmen daher an, daß $a \in (\exists R.C)^{\mathcal{M},w}$, wobei die Behauptung für C schon bewiesen sei. Es gibt also ein $b \in \Delta$, so daß $b \in C^{\mathcal{M},w}$ und aR^wb. Nach Induktionsvoraussetzung ist dies aber äquivalent zu $\mathcal{M}, w, \mathfrak{f}_a \models \exists y(R^T \wedge C^T(y/x))$.

Nimm an, daß $a \in \mathsf{E}(C\mathsf{U}D)^{\mathcal{M},w}$. Nimm weiterhin an, daß die Behauptung des Satzes (nach Induktionsvoraussetzung) für C und D schon bewiesen sei. Damit existiert ein $v \geq w$ mit $a \in D^{\mathcal{M},v}$ und $a \in C^{\mathcal{M},u}$, falls $w \leq u < v$. Folglich existiert ein $v \geq w$, so daß $\mathcal{M}, w, \mathfrak{f}_a \models D^T(x)$ und $\mathcal{M}, w, \mathfrak{f}_a \models C^T(x)$, falls $w \leq u < v$. Letzteres aber heißt $\mathcal{M}, w, \mathfrak{f}_a \models (\mathsf{E}C\mathsf{U}D)^T$. Die verbliebenen Temporaloperatoren werden analog behandelt.

(ii) Da dies eine einfache Induktion ist, betrachten wir lediglich die drei folgenden Äquivalenzen: $\mathcal{M}, w \models a : C$ gdw. $a \in C^{\mathcal{M},w}$ gdw. $\mathcal{M}, w, \mathfrak{f}_a \models C^T(x)$ nach (i), gdw. $\mathcal{M}, w, \mathfrak{f} \models (a : C)^T$ für eine Belegung $\mathfrak{f}$ in $\mathcal{M}$. $\square$

Beachte, daß ψ^T ein Satz in $\mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}}$ ist, falls die $\mathcal{L}_{\mathsf{TALC}}$-Formel ψ atomar ist. Mehr noch, ψ^T ist monodisch, da $C^T \in \mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$, für ein Konzept C in $\mathcal{L}_{\mathsf{TALC}}$. Das heißt, $\varphi^T \in \mathcal{L}_{\mathsf{QCTL}_1}$, für jedes $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathsf{TALC}}$. Da das Zweivariablenfragment von QCTL_1 entscheidbar ist (Korollar 70), und jedes φ^T höchstens zwei verschiedene Individuenvariablen enthält, so haben wir als Konsequenz aus Lemma 73 schließlich:

Satz 74. TALC *ist entscheidbar.*

6.2 Raum-Zeit Logik

Angenommen wir suchen einen logischen Formalismus der in der Lage ist, Wissen über sich zeitlich verändernde räumliche Gebiete zu verarbeiten bzw. zu repräsentieren. Entsprechend unserer jeweiligen Sicht auf die Beschaffenheit des Raumes und der Zeit wählen wir dazu die passende Raumlogik gemeinsam mit einer Zeitlogik aus.

Betrachten wir zunächst den sogenannten *Region Connection Calculus* $\mathcal{BRCC}$-8 (der Leser vergleiche dazu etwa [53]). Die Sprache $\mathcal{L}_{\mathcal{BRCC}\text{-}8}$ von $\mathcal{BRCC}$-8 besteht aus einer abzählbar unendlichen Menge von Individuenvariablen X_0, X_1, ..., genannt *Region Variables*, acht binären Prädikatensymbolen DC, EQ, PO, EC, TPP, NPPi, NTPP, NTPPi und den Boolschen Operatoren.

Boolean Region Terms sind Kombinationen von Region Variables unter Benutzung der Boolschen Operatoren $\vee$, $\wedge$ und $\neg$. Das heißt, jede Region Variable ist ein Region Term, und wenn t und t' Region Terms sind, dann sind auch $t \vee t'$, $t \wedge t'$ und $\neg t$ Region Terms. *Atomare* Formeln in $\mathcal{L}_{\mathcal{BRCC}\text{-}8}$ sind Formeln der Gestalt $\circ\,(t, t')$, worin $\circ$ für eines der acht Prädikatensymbole oben steht, und t sowie t' Region Terms sind. *$\mathcal{L}_{\mathcal{BRCC}\text{-}8}$-Formeln* sind dann einfach Boolsche Kombinationen atomarer Formeln.

„Raum"-Formeln können in *topologischen Räumen* interpretiert werden. Dabei ist ein topologischer Raum ein Paar $\mathfrak{S} = (U, \mathbb{I})$ worin U, das *Universum* des Raumes, eine nichtleere Menge und $\mathbb{I}$ der *Interior Operator* auf U ist, der die folgenden *Kuratowski Axiome* erfüllt. Für alle $X, Y \subset U$:

$$\mathbb{I}(X \cap Y) = \mathbb{I}X \cap \mathbb{I}Y, \quad \mathbb{I}X \subseteq \mathbb{I}\mathbb{I}X, \quad \mathbb{I}X \subseteq X, \quad \mathbb{I}U = U.$$

Der mit $\mathbb{C}$ bezeichnete, zu $\mathbb{I}$ duale Operator, heißt *Closure Operator*. Also $\mathbb{C}X = U \setminus \mathbb{I}(U \setminus X)$ für alle $X \subseteq U$. Eine Menge $X \subseteq U$ heißt *offen*, wenn $\mathbb{I}X = X$, und *abgeschlossen*, wenn $\mathbb{C}X = X$. Region Variables bezeichnen *Regular Closed Sets* in einem topologischen Raum $\mathfrak{S}$, das heißt, eine *Belegung in* $\mathfrak{S}$ ist eine Abbildung $\mathfrak{a}$, die jedem X eine Menge $\mathfrak{a}(X) \subseteq U$ derart zuordnet, daß $\mathfrak{a}(X) = \mathbb{C}\mathbb{I}\mathfrak{a}(X)$. Der *Wert* $\mathfrak{a}(t)$ eines Region Terms t in $\mathfrak{S}$ unter $\mathfrak{a}$ ist rekursiv wie folgt definiert

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}(t \vee t') &= \mathbb{C}\mathbb{I}(\mathfrak{a}(t) \cup \mathfrak{a}(t')), \\ \mathfrak{a}(t \wedge t') &= \mathbb{C}\mathbb{I}(\mathfrak{a}(t) \cap \mathfrak{a}(t')), \\ \mathfrak{a}(\neg t) &= \mathbb{C}\mathbb{I}(U \setminus \mathfrak{a}(t)). \end{aligned}$$

Ein Paar der Form $(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$, worin $\mathfrak{a}$ eine Belegung in dem topologischen Raum $\mathfrak{S}$ ist, heißt *topologisches Modell*. Wir definieren die *Wahrheitsrelation* $\mathfrak{S}, \mathfrak{a} \models \varphi$ für atomare

Formeln φ; Boolsche Kombinationen beliebiger Formeln werden wie gewohnt behandelt. Für alle Region Terms t und t' setzen wir

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{S}, \mathfrak{a} \models \mathsf{DC}(t,t') & \text{gdw.} & \neg\exists x(x \in \mathfrak{a}(t) \cap \mathfrak{a}(t')), \\
\mathfrak{S}, \mathfrak{a} \models \mathsf{EQ}(t,t') & \text{gdw.} & \forall x(x \in \mathfrak{a}(t) \leftrightarrow x \in \mathfrak{a}(t')), \\
\mathfrak{S}, \mathfrak{a} \models \mathsf{PO}(t,t') & \text{gdw.} & \exists x(x \in \mathbb{I}\mathfrak{a}(t) \cap \mathbb{I}\mathfrak{a}(t')) \wedge \exists x(x \in \mathbb{I}\mathfrak{a}(t) \cap (U \setminus \mathfrak{a}(t')))\wedge \\
 & & \exists x(x \in \mathbb{I}\mathfrak{a}(t') \cap (U \setminus \mathfrak{a}(t))), \\
\mathfrak{S}, \mathfrak{a} \models \mathsf{EC}(t,t') & \text{gdw.} & \exists x(x \in \mathfrak{a}(t) \cap \mathfrak{a}(t')) \wedge \neg\exists x(x \in \mathbb{I}\mathfrak{a}(t) \cap \mathbb{I}\mathfrak{a}(t')), \\
\mathfrak{S}, \mathfrak{a} \models \mathsf{TPP}(t,t') & \text{gdw.} & \forall x(x \in \neg\mathfrak{a}(t) \cup \mathfrak{a}(t')) \wedge \exists x(x \in \mathfrak{a}(t) \cap (U \setminus \mathbb{I}\mathfrak{a}(t')))\wedge \\
 & & \exists x(x \in (U \setminus \mathfrak{a}(t)) \cap \mathfrak{a}(t')), \\
\mathfrak{S}, \mathfrak{a} \models \mathsf{TPPi}(t,t') & \text{gdw.} & \mathfrak{S}, \mathfrak{a} \models \mathsf{TPP}(t',t), \\
\mathfrak{S}, \mathfrak{a} \models \mathsf{NTPP}(t,t') & \text{gdw.} & \forall x(x \in \neg\mathfrak{a}(t) \cup \mathbb{I}\mathfrak{a}(t')) \wedge \exists x(x \in \neg\mathfrak{a}(t) \cap \mathfrak{a}(t')), \\
\mathfrak{S}, \mathfrak{a} \models \mathsf{NTPPi}(t,t') & \text{gdw.} & \mathfrak{S}, \mathfrak{a} \models \mathsf{NTPP}(t',t).
\end{array}$$

Diese Relationen können in Englisch beschrieben werden als Disconnection, Equality, Partial Overlap, External Connection, Tangential Proper Part, Non-Tangential Proper Part, und die entsprechenden Inversen der beiden letzten Relationen.

Bis jetzt können wir nur *statischen* Sätze bilden, wie „die EU besteht aus Spanien, Italien, ...“: $\mathsf{EQ}(EU, Spanien \cup Italien \cup \ldots)$. Im Moment etwa mag der Staat S kein Mitglied der EU sein, dieselbe jedoch berühren: $\mathsf{EC}(EU, S)$. Aber es könnte der Fall sein, daß S in seiner jetzigen Ausdehnung morgen schon äußerer Teil der EU ist:

$$\mathsf{TPP}(S, \mathsf{E}\bigcirc EU).$$

Um diese Dynamik zu erfassen, erweitern wir die Sprache von $\mathcal{BRCC}$-8 dadurch, daß wir die Anwendung der temporalen Operatoren generell auf $\mathcal{L}_{\mathcal{BRCC}}$-8-Formeln zulassen; auf Region Terms soll jedoch nur der Next-Operator wirken dürfen. $\mathcal{L}_{t\mathcal{BRCC}}$-8 bezeichne die damit entstandene Sprache.

Ein *Topological Temporal Space* über einem Baum $\mathcal{T} = (T, <, \mathcal{B})$ ist ein Paar der Form $(\mathfrak{S}, \mathcal{T})$, wobei $\mathfrak{S}$ ein topologischer Raum ist (wir diskutieren hier lediglich den allgemeinen Fall, da die „ungebündelte“ Version auf diesen Fall unschwer reduziert werden kann). Eine *Belegung* $\mathfrak{a}$ in $(\mathfrak{S}, \mathcal{T})$ ordnet jeder Region Variable X und jedem Zeitpunkt $w \in T$ ein Regular Closed Set $\mathfrak{a}_w(X) \subseteq U$ zu. Jede Belegung in einem Topological Temporal Space $(\mathfrak{S}, \mathcal{T})$ liefert ein *t$\mathcal{BRCC}$-8-Modell* $\mathfrak{M} = (\mathfrak{S}, \mathcal{T}, \mathfrak{a})$. Rekursiv definieren wir den *Wert* $\mathfrak{a}_w(t)$ eines *Temporal Region Terms* t unter $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{M}$ zum Zeitpunkt w:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_w(\mathsf{A}\bigcirc t) &= \mathbb{C}\mathbb{I} \bigcap_{w' \in succ(w)} \mathfrak{a}_{w'}(t), \\
\mathfrak{a}_w(\mathsf{E}\bigcirc t) &= \mathbb{C}\mathbb{I} \bigcup_{w' \in succ(w)} \mathfrak{a}_{w'}(t).
\end{aligned}$$

Dabei bezeichne $succ(w)$ für jedes $w \in T$ die Menge aller direkten Nachfolger von w in $\mathcal{T}$. Für jedes $t\mathcal{BRCC}$-8-Modell $\mathfrak{M} = (\mathfrak{S}, \mathcal{T}, \mathfrak{a})$, jedes $w \in T$ und alle $\mathcal{L}_{t\mathcal{BRCC}}$-8 Formeln φ, sei $\mathfrak{M}, w, \mathfrak{a} \models \varphi$ wie folgt definiert (Skizze):

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{M}, w \models \varphi & \text{gdw.} & \mathfrak{S}, \mathfrak{a}_w \models \varphi, \text{ falls } \varphi \text{ keine temporalen Operatoren außer solche enthält, die in Temporal Region Terms enthalten sind,} \\
\mathfrak{M}, w \models \mathsf{E}\bigcirc\psi & \text{gdw.} & \mathfrak{M}, v \models \psi, \text{ für einen direkten Nachfolger } v \text{ von } w \text{ in } \mathcal{T}, \\
\mathfrak{M}, w \models \mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2 & \text{gdw.} & \text{für alle } \beta \in \mathcal{B}(w) \text{ existiert ein } v \in \beta, \text{ so daß } v \geq w, \\
& & \mathfrak{M}, v \models \psi_2 \text{ und } \mathfrak{M}, u \models \psi_1, \text{ für alle } u \in [w, v).
\end{array}
$$

Wir bemerken hier folgendes: Unendliche Durchschnitte und Vereinigungen führen zu diversen semantischen Komplikationen (vergleiche [53] für eine detaillierte Diskussion dieser Thematik). Um solche Probleme zu umgehen, können wir versuchen, Belegungen in Modellen so zu reglementieren, daß unendliche Durchschnitte und Vereinigungen auf solche mit endlich vielen Mengen reduziert werden können. Dazu betrachten wir exemplarisch die *Finite State Assumption*:

FSA *Jede Region kann höchstens endlich viele verschieden mögliche States besitzen.*

Wir sagen, daß ein $t\mathcal{BRCC}$-8-Modell $\mathfrak{M} = (\mathfrak{S}, \mathcal{T}, \mathfrak{a})$ die **FSA** *erfüllt*, wenn für jede Region Variable X und jedes $w \in T$, die Menge $\{\mathfrak{a}_w(X) \mid w \in T\}$ endlich ist. Eine $\mathcal{L}_{t\mathcal{BRCC}\text{-}8}$ Formel φ heißt *erfüllbar*, wenn es ein $t\mathcal{BRCC}$-8-Modell $\mathfrak{M} = (\mathfrak{S}, \mathcal{T}, \mathfrak{a})$ gibt, das die **FSA** erfüllt, mit $\mathfrak{M}, w \models \varphi$, für ein $w \in T$.

Wir erinnern uns, daß $\mathsf{S4}$ die Modallogik der Klasse aller Quasiordnungen ist (ein Paar der Form (V, R) heißt Quasiordnung, wenn R eine reflexive und transitive Relation über der nichtleeren Menge V ist). Die Sprache $\mathcal{L}_{t\mathsf{S4}_u}$ entsteht als Erweiterung der Sprache der Modallogik durch die zwei *universellen Modalitäten* $\boxtimes$ und $\diamondsuit$ sowie die Temporaloperatoren. Indem wir $\mathcal{L}_{t\mathsf{S4}_u}$-Formeln in Quasiordnungen auf die übliche Weise interpretieren, erhalten wir die bimodale temporale Aussagenlogik $t\mathsf{S4}_u$.

Die Sprache $\mathcal{L}_{t\mathcal{BRCC}\text{-}8}$ kann nun wie folgt in $\mathcal{L}_{t\mathsf{S4}_u}$ eingebettet werden. Für jeden Boolschen Region Term t definieren wir die modale Formel t^* durch:

$$
\begin{array}{rcl}
X_i^* & = & \Diamond\Box p_i, \ (X_i \text{ eine Region Variable, } p_i \text{ eine Aussagenvariable}), \\
(t_1 \vee t_2)^* & = & \Diamond\Box(t_1^* \vee t_2^*), \\
(t_1 \wedge t_2)^* & = & \Diamond\Box(t_1^* \wedge t_2^*), \\
(\neg t)^* & = & \Diamond\Box(\neg t^*).
\end{array}
$$

Angenommen t^* ist bereits definiert, wo t ein Temporal Region Term ist. Es sei dann $(\mathsf{E}\bigcirc t)^*$ schlicht $\Diamond\Box(\mathsf{E}\bigcirc t^*)$, und analog für $(\mathsf{A}\bigcirc t)^*$. Für jede atomare $\mathcal{L}_{t\mathcal{BRCC}\text{-}8}$-Formel sei

$$
\begin{array}{rcl}
(\mathsf{DC}(t_1, t_2))^* & = & \neg\diamondsuit(t_1^* \wedge t_2^*), \\
(\mathsf{EQ}(t_1, t_2))^* & = & \boxtimes(t_1^* \leftrightarrow t_2^*), \\
(\mathsf{PO}(t_1, t_2))^* & = & \diamondsuit(\Box t_1^* \wedge \Box t_2^*) \wedge \diamondsuit(\Box t_1^* \wedge \neg t_2^*) \wedge \diamondsuit(\neg t_1^* \wedge \Box t_2^*), \\
(\mathsf{EC}(t_1, t_2))^* & = & \diamondsuit(t_1^* \wedge t_2^*) \wedge \neg\diamondsuit(\Box t_1^* \wedge \Box t_2^*), \\
(\mathsf{TPP}(t_1, t_2))^* & = & \boxtimes(\neg t_1^* \vee t_2^*) \wedge \diamondsuit(t_1^* \wedge \Diamond\neg t_2^*) \wedge \diamondsuit(\neg t_1^* \wedge t_2^*), \\
(\mathsf{NTTP}(t_1, t_2))^* & = & \boxtimes(\neg t_1^* \vee \Box t_2^*) \wedge \diamondsuit(\neg t_1^* \wedge t_2^*).
\end{array}
$$

Schließlich bezeichne φ^* für alle $\mathcal{L}_{t\mathcal{BRCC}\text{-}8}$-Formeln φ das Resultat der Ersetzung aller Vorkommen atomarer Formeln $\circ(t_1, t_2)$ in φ, durch $(\circ(t_1, t_2))^*$.

Sei $(\mathfrak{S}, \mathcal{T})$ ein Topological Temporal Space über einem Baum $\mathcal{T} = (T, <, \mathcal{B})$. Eine *Belegung* $\mathfrak{v}$ in $(\mathfrak{S}, \mathcal{T})$ ist eine Abbildung, so daß für jede Aussagenvariable p und jedes $w \in T$, $\mathfrak{v}_w(p)$ eine Teilmenge von U ist. Wir können dann $(\mathfrak{S}, \mathcal{T}, \mathfrak{v})$ als Modell für $\mathcal{L}_{t\mathsf{S4}_u}$-Formeln auffassen, indem wir $\mathfrak{v}$ auf alle $\mathcal{L}_{t\mathsf{S4}_u}$-Formeln in der folgenden Weise ausdehnen:

- $\mathfrak{v}(p, w) = \mathfrak{v}_w(p)$, p eine Aussagenvariable,
- $\mathfrak{v}(\psi_1 \wedge \psi_2, w) = \mathfrak{v}(\psi_1, w) \cap \mathfrak{v}(\psi_2, w)$,
- $\mathfrak{v}(\neg\psi, w) = U \setminus \mathfrak{v}(\psi, w)$,
- $\mathfrak{v}(\Box\psi, w) = \mathbb{I}\mathfrak{v}(\psi, w)$ und $\mathfrak{v}(\Diamond\psi, w) = \mathbb{C}\mathfrak{v}(\psi, w)$,
- $\mathfrak{v}(\mathsf{A}\bigcirc\psi, w) = \bigcap_{v \in succ(w)} \mathfrak{v}(\psi, v)$,
- $\mathfrak{v}(\mathsf{E}\bigcirc\psi, w) = \bigcup_{v \in succ(w)} \mathfrak{v}(\psi, v)$,
- $x \in \mathfrak{v}(\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2, w)$ gdw. für alle $\beta \in \mathcal{B}(w)$ ein $v \in \beta$ existiert, so daß $v \geq w$, $x \in \mathfrak{v}(\psi_2, v)$ und $x \in \mathfrak{v}(\psi_1, u)$, falls $w \leq u < v$; entsprechend für $\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2$.

Die Bedeutung von $\boxtimes$ und $\diamondplus$ ist gegeben durch:

$$\mathfrak{v}(\boxtimes\varphi) = \begin{cases} U & \text{if } \mathfrak{v}(\varphi) = U, \\ \emptyset & \text{andernfalls,} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{v}(\diamondplus\varphi) = \begin{cases} U & \text{if } \mathfrak{v}(\varphi) \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Ein Tripel der Form $(\mathfrak{S}, \mathcal{T}, \mathfrak{v})$ heißt dann *Topological Temporal Model* über $\mathcal{T}$. Wir sagen, daß ein Topological Temporal Model $(\mathfrak{S}, \mathcal{T}, \mathfrak{v})$ die **FSA** erfüllt, wenn für jede Aussagenvariable p und jedes $w \in T$, die Menge $\{\mathfrak{v}_w(p) \mid w \in T\}$ endlich ist. Weiterhin sagen wir, daß die $\mathcal{L}_{t\mathsf{S4}_u}$-Formel φ *erfüllbar* ist in $\mathfrak{F} = (\mathfrak{S}, \mathcal{T}, \mathfrak{v})$, wenn $\mathfrak{F}$ die **FSA** erfüllt und $\mathfrak{v}(\varphi, w) \neq \emptyset$, für ein $w \in T$. Damit erhalten wir unmittelbar:

Satz 75. *Eine $\mathcal{L}_{t\mathcal{BRCC}\text{-}8}$-Formel φ ist erfüllbar in einem $t\mathcal{BRCC}$-8-Modell über einem Baum gdw. φ^* ist erfüllbar in einem Topological Temporal Model über demselben Baum.*

Wir können nun die spezielle Form der Übersetzung $\cdot^*$ zu unseren Gunsten ausnutzen und zeigen, daß das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln der Gestalt φ^* in Topological Temporal Models reduziert werden kann, auf das Erfüllbarkeitsproblem von φ^* in besonders einfachen modalen Strukturen, Strukturen basierend auf sogenannten Quasisägen. Eine *Quasisäge* ist dabei eine partielle Ordnung, in der jeder Punkt höchstens zwei unvergleichbare Nachfolger hat.

Ein *Kripke-Modell* über einer Menge V ist ein Tripel der Form $(V, R, \mathfrak{v})$, wobei V eine nichtleere Menge ist, R eine binäre Relation über V und $\mathfrak{v}$ eine Belegung in V, das heißt, $\mathfrak{v}(p) \subseteq V$ für jede Aussagenvariable p. Wir sind nun in der Lage das folgende Theorem zu beweisen:

Satz 76. *Eine $\mathcal{L}_{t\mathcal{BRCC}\text{-}8}$-Formel φ ist erfüllbar in einem $t\mathcal{BRCC}$-8-Modell über einem Baum $\mathcal{T}$ gdw. φ^* ist erfüllbar in einem Kripke-Modell über einem Produkt von $\mathcal{T}$ und einer Quasisäge $\mathcal{G}$.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Der Beweis verteilt sich auf eine Reihe von Lemmata. Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}^{\bigcirc}_{t\mathsf{S4}_u}$ diejenige Teilsprache von $\mathcal{L}_{t\mathsf{S4}_u}$, in der $\mathsf{E}\bigcirc$ und $\mathsf{A}\bigcirc$ die einzigen temporalen Operatoren sind. Eine $\mathcal{L}_{t\mathsf{S4}_u}$-Formel der Gestalt $\boxdot\psi$ oder $\diamondplus\psi$, wo ψ eine $\mathcal{L}^{\bigcirc}_{t\mathsf{S4}_u}$-Formel ist, heißt *basale u-Formel*. Eine *u-Formel* ist eine $\mathcal{L}_{t\mathsf{S4}_u}$-Formel, die aus basalen u-Formeln unter Benutzung beliebiger Konnektoren aus $\mathcal{L}_{t\mathsf{S4}_u}$ aufgebaut ist.

Lemma 77. *Wenn eine $\mathcal{L}^{\bigcirc}_{t\mathsf{S4}_u}$-Formel oder eine u-Formel φ erfüllt ist in einem Topological Temporal Model über einem Baum $\mathcal{T} = (T, <, \mathcal{B})$, dann ist φ erfüllt in einem Kripke Model über einem Produkt von $\mathcal{T}$ und einem rooted $\mathsf{S4}_u$-Frame $\mathcal{G}$.*

Darüber hinaus können wir das Frame $\mathcal{G} = (V, R_\Box, R_\forall)$ und das Kripke Model $\mathfrak{M}$ über $\mathcal{T} \times \mathcal{G}$ so wählen, daß für alle $w \in T$, $x \in V$ und jedes ψ die Menge

$$A_{w,x,\psi} = \{y \in V \mid xR_\Box y \text{ und } \mathfrak{M}, (w, y) \models \psi\}$$

einen $R_\Box$-maximalen Punkt enthält.

Beweis. (Vergleiche dazu den Beweis in [20]). Ein *Ultrafilter* $\mathbf{u}$ über einer Menge U ist eine Teilmenge der Potenzmenge 2^U von U, so daß

- $U \in \mathbf{u}$,
- wenn $A \in \mathbf{u}$ und $A \subseteq B$, dann $B \in \mathbf{u}$,
- wenn $A \in \mathbf{u}$ und $B \in \mathbf{u}$, dann $A \cap B \in \mathbf{u}$,
- $A \in \mathbf{u}$ gdw. $U \setminus A \notin \mathbf{u}$ für alle $A \subseteq U$.

Angenommen φ ist erfüllt in einem Topological Temporal Space $(\mathfrak{S}, \mathcal{T})$ über einem Baum $\mathcal{T}$ und einem Topological Space $\mathfrak{S} = (U, \mathbb{I})$; das heißt, es gibt eine Belegung $\mathfrak{v}$ in $(\mathfrak{S}, \mathcal{T})$, so daß $\mathfrak{v}(\varphi, w) \neq \emptyset$ für ein $w \in T$.

Bezeichne mit V die Menge aller Ultrafilter über U. Da jede Menge $u \subseteq 2^U$ mit der *endlichen Durchschnittseigenschaft* ($A_1 \cap \ldots \cap A_k \neq \emptyset$, für beliebig endlich viele $A_1, \ldots, A_k \in u$) zu einem Ultrafilter $\mathbf{u}$ erweitert werden kann, so haben wir zunächst $V \neq \emptyset$. Für je zwei Ultrafilter $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$ setze

$$\mathbf{u}_1 R_\Box \mathbf{u}_2 \quad \text{gdw.} \quad \forall A \subseteq U(\mathbb{I}A \in \mathbf{u}_1 \rightarrow A \in \mathbf{u}_2).$$

Es ist leicht zu sehen, daß $R_\Box$ eine Quasiordnung über V ist. Sei $R_\forall$ universelle Relation über V. Wir definieren das Kripke Model $\mathfrak{M} = (\mathcal{T} \times \mathcal{G}, \mathfrak{V})$ indem $\mathcal{G} = (V, R_\Box, R_\forall)$ und

$$\mathfrak{V}(p) = \{(w, \mathbf{u}) \in T \times V \mid \mathfrak{v}_w(p) \in \mathbf{u}\}.$$

Per Induktion über ψ zeigen wir für alle $\mathcal{L}^{\bigcirc}_{t\mathsf{S4}_u}$- und u-Formeln ψ, alle $w \in T$ und jedes $\mathbf{u} \in V$:

$$\mathfrak{M}, (w, \mathbf{u}) \models \psi \quad \text{gdw.} \quad \mathfrak{v}(\psi, w) \in \mathbf{u}. \tag{27}$$

Beispielhaft untersuchen wir den Fall $\psi = \mathsf{A}\bigcirc\psi'$ bzw. $\psi = \mathsf{E}\bigcirc\psi'$; die anderen Fälle können in [20] nachgesehen werden. Wir haben: $\mathfrak{M}, (w, \mathbf{u}) \models \mathsf{A}\bigcirc\psi'$ gdw. für alle direkten Nachfolger w' von w in $\mathcal{T}$, $\mathfrak{M}, (w', \mathbf{u}) \models \psi'$ gdw. nach Induktionsvoraussetzung, für alle direkten Nachfolger w' von w in $\mathcal{T}$, $\mathfrak{v}(\psi', w') \in \mathbf{u}$ gdw. nach **FSA** und der endlichen Durchschnittseigenschaft der Ultrafilter, $\bigcap_{w' \in succ(w)} \mathfrak{v}(\psi', w') \in \mathbf{u}$. Wir bemerken schließlich noch, daß $\bigcap_{w' \in succ(w)} \mathfrak{v}(\psi', w') = \mathfrak{v}(\mathsf{A}\bigcirc\psi', w)$. Der Fall $\psi = \mathsf{E}\bigcirc\psi'$ verläuft ganz analog.

Um (27) für alle u-Formeln ψ zu zeigen, überprüfe man zuerst, daß für alle Belegungen $\mathfrak{v}$ in $(\mathfrak{S}, \mathcal{T})$ und alle $w \in T$, entweder $\mathfrak{v}(\psi, w) = \emptyset$ oder $\mathfrak{v}(\psi, w) = U$. Darüber hinaus gilt $\mathfrak{M}, (w, \mathbf{v}) \models \psi$ für alle $\mathbf{v} \in V$, falls $\mathfrak{M}, (w, \mathbf{u}) \models \psi$. Als Konsequenz erhalten wir (27) für alle u-Formeln. Da $\mathfrak{v}(\varphi, w) \neq \emptyset$ für ein $w \in T$, so folgt $\mathfrak{M}, (w, \mathbf{u}) \models \varphi$ für einen Ultrafilter $\mathbf{u}$, der $\mathfrak{v}(\varphi, w)$ enthält. Der Beweis für die zweite Behauptung kann [20] entnommen werden. $\square$

Wir sagen, daß eine $\mathcal{L}_{t\mathsf{S4}_u}$-Formel ψ ein *normaler Term* ist, wenn es eine $\mathcal{L}_{t\mathsf{S4}_u}$-Formel ψ' gibt, und ψ geht aus ψ' dadurch hervor, daß $\Diamond\Box$ vor jede Teilformel von ψ' geschrieben wird. Wir bemerken noch, daß t^* ein normaler Term ist für alle Temporal Region Terms t.

Eine *normale Formel* ist eine Formel, aufgebaut unter Benutzung der Temporaloperatoren $\mathsf{A}\bigcirc$, $\mathsf{E}\bigcirc$, $\mathsf{A} \cdot \mathsf{U} \cdot$, $\mathsf{E} \cdot \mathsf{U} \cdot$ und den Boolschen Konnektoren sowie Formeln der Gestalt $\diamondsuit\psi$, wobei ψ die Form

$$\psi_1 \wedge \psi_2, \quad \neg\psi_1 \wedge \psi_2, \quad \psi_1 \wedge \neg\Box\psi_2 \quad \text{oder} \quad \Box\psi_1 \wedge \Box\psi_2$$

hat; dabei sind ψ_1 und ψ_2 normale Terme. Durch Ersetzung jedes Vorkommens von $\boxtimes$ durch $\neg\diamondsuit\neg$ in der modalen Übersetzung $\cdot^*$ atomarer $\mathcal{L}_{t\mathcal{BRCC}\text{-}8}$-Formeln erhalten wir: *Die modale Übersetzung $\cdot^*$ jeder $\mathcal{L}_{t\mathcal{BRCC}\text{-}8}$-Formel ist äquivalent (in Topological Temporal Spaces) zu einer normalen Formel.*

Der Beweis des folgenden Lemmas verläuft in exakt der gleichen Weise, wie für die Lemmata 16.5 und 16.6 in [20].

Lemma 78. *Es sei die normale Formel φ erfüllt in einem Kripke Model $\mathfrak{M}$ über einem Produkt eines Baumes $\mathcal{T} = (T, <, \mathcal{B})$ und einem rooted $\mathsf{S4}_u$-Frame $\mathcal{G} = (V, R_\Box, R_\forall)$. Angenommen für alle $w \in T$, $x \in V$ und jede normale Formel ψ, daß die Menge*

$$A_{w,x,\psi} = \{y \in V \mid xR_\Box y \text{ und } \mathfrak{M}, (w, y) \models \psi\}$$

ein $R_\Box$-maximalen Punkt enthält. Dann ist φ erfüllt in einem Kripke Model $\mathfrak{M}'$ über dem Produkt von $\mathcal{T}$ und einer Quasisäge $\mathcal{G}'$. Wenn $\mathfrak{M}$ die **FSA** *erfüllt, dann erfüllt $\mathfrak{M}'$ die* **FSA**.

Wir nehmen nun an, daß die $\mathcal{L}_{t\mathcal{BRCC}\text{-}8}$-Formel φ in einem $t\mathcal{BRCC}$-8-Modell über einem Baum $\mathcal{T}$ erfüllt ist. Dann ist, nach Theorem 75, φ^* erfüllt in einem Topological Temporal

Model über $\mathcal{T}$. Da φ^* eine normale Formel ist (genauer, äquivalent zu einer solchen) und jede normale Formel eine u-Formel ist, so folgt mit Lemma 77, daß φ^* erfüllt ist in einem Kripke Model über einem Produkt von $\mathcal{T}$ und einem rooted $\mathsf{S4}_u$-Frame. Nach Lemma 78 haben wir damit, daß φ^* erfüllt ist, in einem Kripke Model über dem Produkt von $\mathcal{T}$ und einer Quasisäge.

($\Leftarrow$) Um die umgekehrte Richtung einzusehen nehmen wir an, daß die $\mathcal{L}_{t\mathsf{S4}_u}$-Formel φ^* erfüllt ist in einem Kripke Model über dem Produkt eines Baumes $\mathcal{T}$ und einem $\mathsf{S4}_u$-Frame $\mathcal{G}$ (eine Quasisäge ist ein solches Frame).

Es ist nicht schwer zu sehen, daß für jede $\mathcal{L}_{t\mathsf{S4}_u}$-Formel ψ gilt: wenn ψ erfüllt ist in einem Kripke Model $\mathfrak{M} = (\mathcal{T} \times \mathcal{G}, \mathfrak{V})$ über einem Produkt eines Baumes $\mathcal{T} = (T, <, \mathcal{B})$ und einem $\mathsf{S4}_u$-Frame $\mathcal{G} = (V, R_\Box, R_\forall)$, dann ist ψ erfüllbar in einem Topological Temporal Space der Form $(\mathfrak{S}_\mathcal{G}, \mathcal{T})$. Zunächst ordnen wir $\mathcal{G}$ einen Topological Space $\mathfrak{S}_\mathcal{G} = (V, \mathbb{I})$, den sogenannten *Kripke Space erzeugt durch* $\mathcal{G}$, auf die folgende Weise zu. Für jedes $X \subseteq V$ sei

$$\mathbb{I}X = \{x \in X \mid \forall y \in V(xR_\Box y \to y \in X)\}.$$

Die Belegung $\mathfrak{v}$ in $(\mathfrak{S}_\mathcal{G}, \mathcal{T})$ ist für jede Aussagenvariable p, jedes $w \in T$ und alle $x \in V$ durch

$$x \in \mathfrak{v}(p, w) \quad \text{gdw.} \quad (w, x) \in \mathfrak{V}(p)$$

definiert. Die Behauptung kann schließlich durch eine einfache Induktion über ψ nachgewiesen werden. $\Box$

Wir gehen nun einen Schritt weiter und bemerken, daß das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln der Gestalt φ^* in Kripke Modellen über Produkten eines Baumes mit einer Quasisäge reduziert werden kann auf das Erfüllbarkeitsproblem erststufiger Formeln mit *einer* Variablen (siehe [51]). Fixiere eine Individuenvariable x. Für jede Aussagenvariable p reservieren wir drei verschiedene einstellige Prädikatensymbole B_p, L_p, R_p. Setze

$$p^b = B_p(x), \qquad p^l = L_p(x) \quad \text{und} \quad p^r = R_p(x).$$

Schließlich definieren wir rekursiv drei Übersetzungen $\cdot^b$, $\cdot^l$ und $\cdot^r$ wie folgt:

$$\begin{array}{rcl}
(\psi_1 \circ \psi_2)^i &=& \psi_1^i \circ \psi_2^i, \text{ für } i \in \{b, l, r\} \text{ und } \circ \in \{\wedge, \vee\}, \\
(\neg\psi)^i &=& \neg\psi^i, \text{ für } i \in \{b, l, r\}, \\
(\Box\psi)^b &=& \psi^b \wedge \psi^l \wedge \psi^r, \\
(\Box\psi)^i &=& \psi^i, \text{ für } i \in \{l, r\}, \\
(\Diamond\psi)^b &=& \psi^b \vee \psi^l \vee \psi^r, \\
(\Diamond\psi)^i &=& \psi^i, \text{ für } i \in \{l, r\}, \\
(\boxed{\forall}\psi)^i &=& \forall x(\psi^b \wedge \psi^l \wedge \psi^r), \text{ für } i \in \{b, l, r\}, \\
(\Diamond\!\!\!\exists\,\psi)^i &=& \exists x(\psi^b \vee \psi^l \vee \psi^r), \text{ für } i \in \{b, l, r\}, \\
(\mathsf{A}\psi_1\mathsf{U}\psi_2)^i &=& \mathsf{A}\psi_1^i\mathsf{U}\psi_2^i, \text{ für } i \in \{b, l, r\} \text{ (analog für } (\mathsf{E}\psi_1\mathsf{U}\psi_2)^i), \\
(\mathsf{A}\bigcirc\psi)^i &=& \mathsf{A}\bigcirc\psi^i, \text{ für } i \in \{b, l, r\} \text{ (analog für } (\mathsf{E}\bigcirc\psi)^i).
\end{array}$$

Endlich definieren wir die Übersetzung $\varphi^\dagger$ einer $\mathcal{L}_{t\mathcal{BRCC}\text{-}8}$-Formel φ in das *Einsvariablenfragment* von QCTL als $(\varphi^*)^b$. Damit haben wir das folgende Analogon von Theorem 16.7 in [20]:

Satz 79. *Eine $\mathcal{L}_{t\mathcal{BRCC}\text{-}8}$-Formel φ ist erfüllbar in einem Topological Temporal Model gdw. $\varphi^\dagger$ ist eine erfüllbare* QCTL*-Formel.*

Da das Einsvariablenfragment von QCTL entscheidbar ist (eine einfache Folgerung aus Korollar 70), muß $t\mathcal{BRCC}$-8 ebenfalls entscheidbar sein:

Satz 80. *Das Erfüllbarkeitsproblem für $\mathcal{L}_{t\mathcal{BRCC}\text{-}8}$-Formeln ist entscheidbar.*

Diskussion

Das Ziel dieses Abschnitts war es exemplarisch zu zeigen, wie die zu Grunde gelegte temporale Semantik den praktischen Erfordernissen angepaßt werden kann. So ließe sich beispielsweise in den in Abschnitt 6.1 und 6.2 diskutierten Anwendungen auch *explizit* über Branches quantifizieren. Unter Ausnutzung der Entscheidbarkeit des schwach monodischen Einsvariablenfragmentes von QCTL* (Abschnitt 5.3) kann die Entscheidbarkeit der so gewonnenen Formalismen analog dem Vorgehen in diesem Abschnitt nachgewiesen werden.

Schlußbemerkungen

Es ist uns in der vorliegenden Arbeit gelungen, die Vollständigkeit der hier vorgeschlagenen Axiomatisierung des monodischen Fragments von QCTL nachzuweisen. Darüber hinaus konnten wir zeigen, daß CTL* in nichtlokaler Semantik entscheidbar ist. Die bis dahin entwickelten Methoden konnten wir schließlich nutzen, um weiterreichende Entscheidbarkeitsaussagen bezüglich monodischer Fragmente von QCTL und QPCTL* machen zu können.

Am Beispiel temporaler Beschreibungslogik und Raum-Zeit Logik haben wir im letzten Abschnitt gezeigt, wie sich diese Ergebnisse auf praktisch einsetzbare Formalismen übertragen lassen.

Insgesamt ergibt sich aus den hier gezeigten bzw. dokumentierten Resultaten ein differenzierteres Bild, als es sich bei linearen Zeitlogiken bietet. Einerseits lassen sich die in den Arbeiten über linerare Zeitlogiken gewonnenen positiven Ergebnisse bezüglich algorithmischer Eigenschaften erststufiger Fragmente nicht ohne weiteres auf den Branching-Time Fall übertragen (Unentscheidbarkeit des Einsvariablenfragments von QCTL*). Auf der anderen Seite konnten wir zeigen, das es dennoch nichttriviale axiomatisierbare bzw. entscheidbare Fragmente quantifizierter nichtlinearer Zeitlogiken gibt (monodische Fragmente von QCTL).

Es ergeben sich aus der vorliegenen Arbeit zahlreiche mögliche Ansatzpunkte für weiterführende Untersuchungen. So zum Beispiel

- Axiomatisierbarkeit der um den Vergangenheitsoperator S erweiterten Logik QCTL$_1$,
- Axiomatisierbarkeit des monodischen Fragments von QCTL*,
- Komplexität der in den Abschnitten 4 und 5 untersuchten Logiken.

Ein Großteil dieser Arbeit entstand während meiner Zeit als Mitglied des Graduiertenkollegs „Wissensrepräsentation“ am Institut für Informatik der Universität Leipzig. Ich möchte mich an dieser Stelle bei den Mitgliedern und Mitarbeitern des Graduiertenkollegs für deren Unterstützung meiner Arbeit bedanken. Insbesondere danke ich Prof. Dr. Frank Wolter für dessen fachliche Unterstützung. Ohne ihn wäre diese Arbeit so nicht entstanden.

Schließlich möchte ich meinem Betreuer Prof. Dr. Heinrich Wansing, der es mir ermöglicht hat meine Arbeit abzuschließen und dem Institut für Philosophie der TU-Dresden vorzulegen, danksagen.

Literatur

[1] H. Andréka, J. van Benthem, and I. Németi. Modal logics and bounded fragments of predicate logic. *Journal of Philosophical Logic*, 27:217–274, 1998.

[2] A. Artale and E. Franconi. Temporal description logics. In *Handbook of Time and Temporal Reasoning in Artificial Intelligence*. MIT Press, 2003. (To appear).

[3] S. Bauer, I. Hodkinson, F. Wolter, and M. Zakharyaschev. On non-local propositional and local one variable CTL^*. In *Proceedings of Time'02*, pages 2–9. IEEE Computer Science Press, 2002.

[4] N. Belnap, M. Perloff, and M. Xu. *Facing the Future: Agents and Choices in our Indeterminist World.* Oxford University Press, Oxford, 2001.

[5] B. Bennett. Spatial reasoning with propositional logic. In *Proceedings of the 4th International Conference on Knowledge Representation and Reasoning*, pages 51–62. Morgan Kaufmann, 1994.

[6] J. van Benthem. Dynamic bits and pieces. Technical Report LP–97–01, ILLC, University of Amsterdam, 1997.

[7] E. Börger, E. Grädel, and Yu. Gurevich. *The Classical Decision Problem.* Perspectives in Mathematical Logic. Springer, 1997.

[8] R. Brachman and J. Schmolze. An overview of the KL-ONE knowledge representation system. *Cognitive Science*, 9:171–216, 1985.

[9] J. Burgess. Logic and time. *Journal of Symbolic Logic*, 44:566–582, 1979.

[10] J. Chomicki and D. Niwinski. On the feasibility of checking temporal integrity constraints. *Journal of Computer and Systems Sciences*, 51:523–535, 95.

[11] J. Chomicki and D. Toman. Temporal logic in information systems. In J. Chomicki and G. Saake, editors, *Logics for Databases and Information Systems.* Kluwer Academic Publishers, 1998.

[12] E. Clarke and E. Emerson. Design and synthesis of synchronisation skeletons using Branching Time Temporal Logic. In *Proc. Workshop on Logics of Programs*, volume 131 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 52–71. Springer, 1981.

[13] M. Egenhofer and R. Franzosa. Point-set topological spatial relations. *International Journal of Geographical Information Systems*, 5(2):161–174, 1991.

[14] E. Emerson. Temporal and modal logic. In J. van Leeuwen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science*, pages 996–1076, 1990.

[15] E. Emerson and J. Halpern. Decision procedures and expressiveness in the temporal logic of branching time. *Journal of Computer and System Sciences*, 30:1–24, 1985.

[16] E. Emerson and J. Halpern. 'Sometimes' and 'not never' revisited: on branching versus linear time. *Journal of the ACM*, 33:151–178, 1986.

[17] E. Emerson and C. Jutla. The complexity of tree automata and logics of programs. In *Proceedings of the 29th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 328–337. IEEE, 1988.

[18] R. Fagin, J. Halpern, Y. Moses, and M. Vardi. *Reasoning about Knowledge.* MIT Press, 1995.

[19] D. Gabbay, I. Hodkinson, and M. Reynolds. *Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects, Volume 1.* Oxford University Press, 1994.

[20] D. Gabbay, A. Kurucz, F. Wolter, and M. Zakharyaschev. *Many-Dimensional Modal Logics: Theory and Application.* Studies in Logic, Elsevier, 2003.

[21] E. Grädel. Decision procedures for guarded logics. In *Automated Deduction—CADE-16, Proceedings of the 16th International Conference on Automated Deduction*, volume 1632 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence*. Springer, 1999.

[22] E. Grädel. On the restraining power of guards. *Journal of Symbolic Logic*, 64:1719–1742, 1999.

[23] R.I. Goldblatt. *Axiomatizing the Logic of Computer Programming.* Volume 130 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 1982.

[24] R.I. Goldblatt. *Logics of Time and Computation.* Number 7 in CSLI Lecture Notes, Stanford. CSLI, 1987.

[25] W. Hodges. *Model theory*, volume 42 of *Encyclopedia of mathematics and its applications.* Cambridge University Press, 1993.

[26] I. Hodkinson. Monodic packed fragment with equality is decidable. *Studia Logica*, 72:185–197, 2002.

[27] I. Hodkinson. Loosely guarded fragment of first-order logic has the finite model property. *Studia Logica*, 70:205–240, 2002.

[28] I. Hodkinson, R. Kontchakov, A. Kurucz, F. Wolter, and M. Zakharyaschev. On the computational complexity of decidable fragments of first-order linear temporal logics, 2003. Time-03, submitted.

[29] I. Hodkinson, F. Wolter, and M. Zakharyaschev. Decidable fragments of first-order temporal logics. *Annals of Pure and Applied Logic*, 106:85–134, 2000.

[30] I. Hodkinson, F. Wolter, and M. Zakharyaschev. Monodic fragments of first-order temporal logics: 2000–2001 A.D. In R. Nieuwenhuis and A. Voronkov, editors, *Logic for Programming, Artificial Intelligence and Reasoning*, number 2250 of LNAI, pages 1–23, Springer, 2001.

[31] I. Hodkinson, F. Wolter, and M. Zakharyaschev. Decidable and undecidable fragments of first-order branching temporal logics. In *Proceedings of the 17th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS'02)*, pages 393–402. IEEE, 2002.

[32] J. Horty and N. Belnap. The Deliberative Stit: A Study of Action, Omission, Ability and Obligation. In *Journal of Philosophical Logic*, 24:583–644, 1995.

[33] H. Kamp. *Tense Logic and the Theory of Linear Order.* PhD Thesis, University of California, Los Angelos, 1968.

[34] M. Kracht. *Tools and Techniques in Modal Logic.* Number 142 in Studies in Logic. Elsevier, Amsterdam, 1999.

[35] F. Laroussinie and P. Schnoebelen. A hierarchy of temporal logics with past. In number 775 of LNCS, pages 47–58, Springer-Verlag, 1994.

[36] Z. Manna and A. Pnueli. *The temporal logic of reactive and concurrent systems.* Springer-Verlag, 1992.

[37] M. Marx. Tolerance logic. *Journal of Logic, Language and Information*, 10:353–373, 2001.

[38] S. Merz. Decidability and incompleteness results for first-order temporal logics of linear time. *Journal of Applied Non-classical Logic*, 2, 1992.

[39] M. Mortimer. On languages with two variables. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 21:135–140, 1975.

[40] O. Øhrstrøm and P.F.V. Hasle. *Temporal Logic: From Ancient Ideas to Artificial Intelligence.* volume 57 of *Studies in Logic and Philosophy.* Kluwer Academic Publishers, 1996.

[41] A. Pnueli. The temporal logic of programs. In *Proceedings of the Eighteenth Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 46–57, 1977. Providence, RI.

[42] A. Prior. *Past, Present and Future.* Oxford University Press, 1967.

[43] W.C. Purdy. Decidability of fluted logic with identity. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37:84–104, 1996.

[44] W.C. Purdy. Fluted formulas and the limits of decidability. *Journal of Symbolic Logic*, 61:608–620, 1996.

[45] M. O. Rabin. Decidability of second-order theories and automata on infinite trees. *Transactions of the American Mathematical Society*, 141:1–35, 1969.

[46] J. Renz. A canonical model of the region connection calculus. In *Proceedings of the 6th International Conference on Knowledge Representation and Reasoning*, pages 330–341. Morgan Kaufmann, 1994.

[47] M. Reynolds. An axiomatisation of full computaion tree logic. *Journal of Symbolic Logic*, 66(3):1011–1057, 2001.

[48] K. Segerberg. Modal logics with linear alternative relations. *Theoria*, 36:301–322, 1970.

[49] K. Segerberg. Von Wright's tense logic. In *The philosophy of Georg Henrik von Wright*, P. Schilpp and L. Hahn, editors, La Salle, IL: Open Court, pages 603–635, 1989.

[50] A. Sistla and E. Clarke. The complexity of propositional linear temporal logic. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 32:733–749, 1985.

[51] F. Wolter and M. Zakharyaschev. Spatial reasoning in RCC-8 with boolean region terms. In W. Horn, editor, *Proceedings of the fourteenth European Conference on Artificial Intelligence, ECAI 2000, Berlin, Germany*, pages 244–248. IOS Press, 2000.

[52] F. Wolter and M. Zakharyaschev. Axiomatizing the monodic fragment of first-order temporal logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 118:133–145, 2002.

[53] F. Wolter and M. Zakharyaschev. Qualitative Spatiotemporal Representation and Reasoning: A Computational perspective. In *Artificial Intelligence in the New Millennium*, G. Lakemeyer and B. Nebel, editors, Morgan Kaufman, pages 175–215, 2002.

[54] A. Zanardo. A finite axiomatization of the set of strongly valid Ockhamist formulas. *Journal of Philosophical Logic*, 14:447–468, 1985.

[55] A. Zanardo. Branching-time logic with quantification over branches: the point of view of modal logic. *Journal of Symbolic Logic*, 61:1–39, 1996.